

کتاب‌های
سه‌بعدی



آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ویژه رشته ریاضی

فیزیک ۲

(یازدهم)

رضا خالو



انتشارات
گنگو

مقدمه مؤلفان

سخن نخست

درست است که تألیف هر کتاب تازه سختی‌های خودش را دارد، اما سخت‌ترین کار شاید تألیف کتابی باشد که پایه‌ی اصلی آن آموزش است؛ آموزش مطالبی نو بر مبنای کتاب درسی‌ای که تاکنون تدریس نشده است. برای نوشتن این کتاب آموزش - محور نیز با چند چالش اساسی مواجه بودیم:

۱) این که دانش‌آموزان پایه‌ی یازدهم تا چه حدی از مطالب ریاضی پیش‌نیاز فیزیک مطلعند؟

۲) این که تا چه حد می‌توانستیم از کتاب درسی فراتر برویم؟

۳) این که چگونه مطالبی را بیان کنیم که احتمالاً در کنکور سراسری سال آینده طرح خواهند شد؟

برای بررسی چالش اول، تمام کتاب‌های درسی ریاضی پایه‌ای را که در سال‌های قبل دانش‌آموزان خوانده‌اند، بررسی کردیم. در کمال تعجب متوجه شدیم با آن که دانش‌آموزان با مفاهیمی مثل بردار، تجزیه‌ی بردار، بردارهای یک‌ه و ... آشنا هستند، اما مفهوم ساده‌ای مانند به‌دست آوردن بردارها از روش متوازی‌الاضلاع را یاد نگرفته‌اند. مسائل دیگری از این دست نیز سبب شد که خود را مقید کنیم که تنها مسائلی را در کتاب طرح و بررسی و حل کنیم که دانش‌آموزان با استفاده از ریاضیات پایه‌ای که یاد گرفته‌اند بتوانند آن‌ها را حل کنند. (البته جای ذکر تأسف عمیق ما از روند ناقص آموزش ریاضی در سال‌های قبل باقی است.) در مسیر بررسی چالش اول، عملاً چالش دوم نیز حل شد؛ فرارمان بر این شد که تا جایی از کتاب درسی فراتر برویم که دانش‌آموزان عزیز بر ریاضیات پیش‌نیاز آن مسلط باشند. یعنی مطلب اضافه‌ای به آن‌ها آموزش داده نشود، ولی پرسش‌های عمیق‌تر و مشکل‌تری با توجه به مطالب قبلی طرح گردد.

اما چالش نگران‌کننده چالش سوم بود. با توجه به آن که در سال دوازدهم قطعاً دانش‌آموزان ریاضیات پیشرفته‌تری را یاد خواهند گرفت، ممکن است طراحان سؤال‌های کنکور سراسری سال آینده مسائلی را طرح کنند که بر مبنای فیزیک پایه‌ی یازدهم باشد، اما از ریاضی پایه‌ی دوازدهم استفاده کند (کاری که پیش از این هم در نظام قبلی آموزش بارها سابقه داشته است). برای آشنایی دانش‌آموزان، اندکی به چنین مسائل و تست‌هایی ناخنک زده‌ایم، ولی آن‌ها را کاملاً با کادرها و علامت‌های مشخص از بدنه‌ی کتاب جدا کرده‌ایم که برای علاقه‌مندان و کسانی که سال بعد می‌خواهند مطالب فیزیک امسال را دوباره و عمیق‌تر بخوانند مفید است.

ساختار کتاب

ساختار این کتاب تقریباً شبیه ساختاری است که در کتاب‌های موفق قبلی داشته‌ایم.

هر فصل کتاب به‌صورت زیر تقسیم شده است:

۱- هر فصل از چند بخش تشکیل شده که هر بخش یک آموزش مفصل دارد و انتهای بخش، تمرین‌های تشریحی و پرسش‌های مفهومی طرح شده است.

مقدمه‌ی مؤلفان

۲- در انتهای فصل یک مجموعه‌ی کامل از تست‌های آموزشی فرار گرفته که برای آشنایی دانش‌آموزان با تست‌های آزمون‌های مختلف بسیار مفید است.

۳- انتهای هر فصل یک آزمون تشریحی طرح شده که دانش‌آموزان می‌توانند به کمک آن آموخته‌های خود را بسنجند. در انتهای کتاب نیز دو آزمون جامع از کل کتاب برای آمادگی در امتحانات پایان سال طرح شده است. تمام سعی ما بر این بوده که این کتاب از نظر تمرین و تست غنی باشد، برای همین علاوه بر مثال‌ها و مسائل فراوانی که بین آموزش حل کرده‌ایم، بیش از ۵۰۰ تست و ۵۰۰ تمرین تشریحی نیز در کتاب (همراه با پاسخ‌های تشریحی) قرار داده‌ایم که در عمل امید داریم کتابی واقعاً جامع آماده شده باشد.

● سخن پایانی

دشواری‌های تألیف کتاب به جای خود، آماده‌سازی هر کتاب برای چاپ چنان روند پیچیده و مشکلی دارد که بدون یاری افراد بسیاری که به ما کمک کرده‌اند، انتشار این کتاب امکان‌پذیر نبود. وظیفه‌ی خود می‌دانیم که در همین جا از همه‌ی آن‌ها سپاسگزاری کنیم، به ویژه قدردان زحمات‌های ویراستاران کتاب خانم زهره نوری و خانم زهرا امیدوار هستیم. همچنین از دانش‌آموزان عزیز که در کاستن اشتباه‌های این کتاب ما را یاری کردند، آقای علی طننازی و خانم سارا صحیح‌النسب تشکر می‌کنیم و از خانم سکینه مختار نیز برای انجام هماهنگی‌های لازم سپاسگزاری می‌کنیم.

و با این سخن کلیشه‌ای، که ما به وجود کلیشه‌ای بودن به آن اعتقادی کامل داریم، مقدمه را تمام می‌کنیم که از نقدها و نظرهای خود ما را بی‌نصیب نگذارید. امیدواریم که حاصل تلاش ما شایسته‌ی اعتماد شما بوده باشد.

همچنین از آقای امیرعلی مهربی به دلیل همکاری فعال در تألیف این کتاب تشکر ویژه داریم.

مؤلفان

فهرست

● فصل اول: الکتروسیسته ساکن

- بخش اول: بار الکتریکی و ویژگی‌های آن - یادآوری ۲
- تمرین‌های تشریحی بخش اول ۱۱
- بخش دوم: قانون کولن ۱۴
- تمرین‌های تشریحی بخش دوم ۳۰
- بخش سوم: میدان الکتریکی ۳۴
- تمرین‌های تشریحی بخش سوم ۴۹
- بخش چهارم: انرژی پتانسیل الکتریکی - توزیع بار در رساناها ۵۵
- تمرین‌های تشریحی بخش چهارم ۶۸
- بخش پنجم: خازن ۷۴
- تمرین‌های تشریحی بخش پنجم ۸۲
- پاسخ تمرین‌های تشریحی فصل اول ۸۵
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول ۱۲۳
- پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل اول ۱۴۳
- آزمون فصل اول ۱۷۶
- پاسخ‌های تشریحی آزمون فصل اول ۱۷۹

● فصل دوم: جریان الکتریکی و مدارهای

جریان مستقیم

- بخش اول: مقاومت الکتریکی - مقاومت الکتریکی ۱۸۴
- تمرین‌های تشریحی بخش اول ۱۹۵
- بخش دوم: نیروی محرکه‌ی باتری - مدار تک حلقه ۲۰۲
- تمرین‌های تشریحی بخش دوم ۲۰۸
- بخش سوم: توان در مدارهای الکتریکی - توان مصرفی - توان باتری ۲۱۱
- تمرین‌های تشریحی بخش سوم ۲۱۶
- بخش چهارم: به هم بستن مقاومت‌ها - قاعده حلقه - قاعده انشعاب ۲۱۹
- تمرین‌های تشریحی بخش چهارم ۲۳۸
- پاسخ تمرین‌های تشریحی فصل دوم ۲۴۹
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوم ۲۸۵
- پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل دوم ۳۱۱
- آزمون فصل دوم ۳۵۲
- پاسخ تشریحی آزمون فصل دوم ۳۵۵

● فصل سوم: مغناطیس

- بخش اول: مغناطیس - نیروهای مغناطیسی ۳۶۰
- تمرین‌های تشریحی بخش اول ۳۷۴
- بخش دوم: آثار مغناطیسی جریان الکتریکی - ویژگی‌های مغناطیسی مواد ۳۸۰
- تمرین‌های تشریحی بخش دوم ۳۸۹
- پاسخ تمرین‌های تشریحی فصل سوم ۳۹۸
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل سوم ۴۱۵
- پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل سوم ۴۲۵
- آزمون فصل سوم ۴۳۴
- پاسخ تشریحی آزمون فصل سوم ۴۳۶

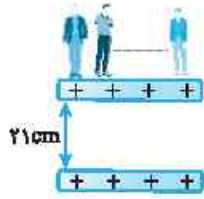
● آزمون‌های جامع

۵۱۸	آزمون جامع ۱
۵۲۱	آزمون جامع ۲
۵۲۳	پاسخ تشریحی آزمون جامع ۱
۵۲۶	پاسخ تشریحی آزمون جامع ۲

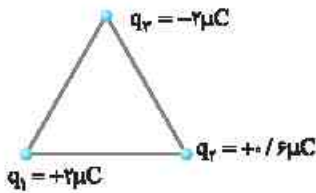
● فصل چهارم: القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب

۴۴۰	بخش اول، پدیده‌ی القای الکترومغناطیسی
۴۵۰	تمرین‌های تشریحی بخش اول
۴۵۶	بخش دوم، القاگرها و اثر خود - القاوری
۴۶۵	تمرین‌های تشریحی بخش دوم
۴۶۹	پاسخ تمرین‌های تشریحی فصل چهارم
۴۸۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل چهارم
۴۹۸	پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل چهارم
۵۱۱	آزمون فصل چهارم
۵۱۴	پاسخ تشریحی آزمون فصل چهارم

۶۱- دو میله نارسنای باردار که بار هر یک $4C$ است مطابق شکل یکی بر سطح زمین و دیگری در فاصله 2 کیلومتری از آن در بالای میله اول قرار دارد، چند نفر که جرم هر یک 50 کیلوگرم است می‌توانند روی میله بالایی بایستند تا میله در جای خود ساکن بماند؟ (جرم هر میله یک تن است.)

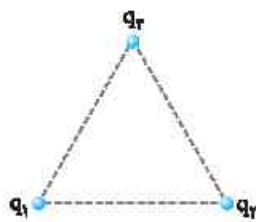


۶۲* سه ذره یاردار در سه رأس مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع 6cm ثابت شده‌اند. بزرگی نیروی الکتریکی برآیند بر بار q_3 را بر حسب نیوتون به دست آورید.



(ریاضی - شهردار ۹۳)
$$(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2})$$

۶۳* سه ذره یاردار مطابق شکل در سه رأس مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع 6 سانتی‌متر ثابت شده‌اند.

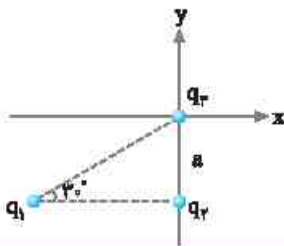


الف) نیروی الکتریکی وارد بر بار q_3 چند نیوتون است؟

ب) جهت نیروی الکتریکی وارد بر بار q_3 را با رسم شکل نشان دهید.

(ریاضی - مرداد ۹۱)
$$(q_1 = -4 \mu\text{C}, q_2 = 4 \mu\text{C}, q_3 = 5 \mu\text{C}, k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2})$$

۶۴* در شکل رویه‌رو، $q_1 = q_2 = q_3 = 1 \mu\text{C}$ و $a = 5\text{cm}$ است. برآیند نیروی الکتریکی وارد بر بار q_3 را بر حسب بردارهای یک‌ه‌ی \vec{i} و \vec{j} مشخص کنید.



بخش سوم: میدان الکتریکی

میدان الکتریکی

در زندگی روزمره هرگاه شما بخواهید بر جسمی نیرو وارد کنید (آن را بکشید یا هل دهید)، باید با آن تماس برقرار کنید، یعنی جسم را لمس کنید و بر آن نیرو وارد کنید و اگر یک شعبده‌باز را ببینید که بدون دست زدن به یک جسم آن را از زمین بلند می‌کند، دائماً به دنبال نخ‌های نامرئی می‌گردید که شعبده‌باز به کمک آن‌ها جسم را از زمین بلند می‌کند و باور ندارید که بدون تماس بتوان به جسم نیرو وارد کرد و مثلاً آن را از زمین جدا کرد.

اما جالب است که هرگاه یک شانه‌ی پلاستیکی را با موی سر خود مالش می‌دهید و آن را باردار می‌کنید و با نزدیک کردن شانه به ذرات کاغذ شاهد رپوده شدن ذرات کاغذ توسط شانه می‌شوید، متعجب نمی‌شوید. انگار باور دارید در اطراف این شانه‌ی پلاستیکی باردار خاصیتی وجود دارد که قادر است بدون تماس با ذرات کاغذ آن‌ها را برباید و البته این حس شما درست است. این خاصیت فضای اطراف جسم باردار را که بر اجسام دیگر نیرو وارد می‌کند، میدان الکتریکی گویند.

تعریف در فضای اطراف هر جسم باردار خاصیتی ایجاد می‌شود که هر جسم دیگری را که در این فضا واقع شود، تحت تأثیر قرار می‌دهد. به این خاصیت میدان الکتریکی می‌گویند.

به بیان دیگر، میدان الکتریکی خاصیتی است که در اطراف هر جسم باردار ایجاد می‌شود، به گونه‌ای که هرگاه جسم باردار دیگری در این فضا قرار گیرد، بر آن نیروی الکتریکی وارد می‌شود.

تعریف کمی میدان الکتریکی: میدان الکتریکی به طور کمی به صورت نیروی وارد بر یکای بار مثبت در هر نقطه تعریف می‌شود. مطابق شکل زیر، بار نقطه‌ای $+q$ را در نظر بگیرید که در میدان الکتریکی بار $+q$ و در نقطه‌ی A قرار گرفته است و نیروی \vec{F}

به آن وارد می‌شود. اگر میدان الکتریکی حاصل از بار $+q$ در نقطه‌ی A را با \vec{E} نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$



با توجه به رابطه $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ ، یکای میدان الکتریکی نیوتون بر کولن ($\frac{N}{C}$) است.

ضرب عدد در بردار:

در صفحه ۷۵ کتاب ریاضی پایه هفتم ضرب عدد در بردار را خوانده‌اید.

یادآوری

در ضرب یک عدد در بردار، آن عدد در طول و عرض بردار ضرب می‌شود. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

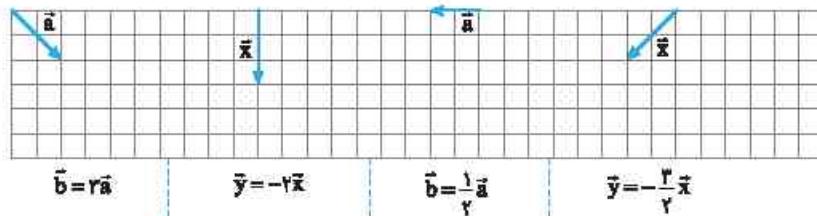
$$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \vec{b} = -\vec{a} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$

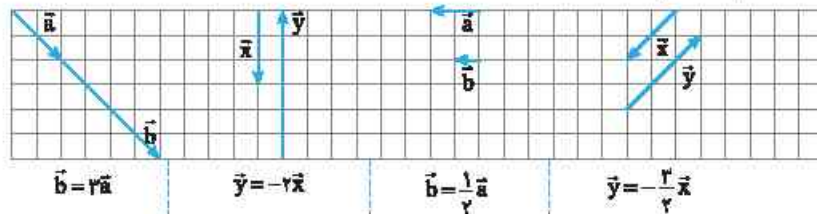
اگر بردار \vec{b} قرینه بردار \vec{a} باشد، می‌نویسیم: $\vec{b} = -\vec{a}$ یا $\vec{b} = (-1)\vec{a}$

کار در کلاس صفحه ۷۵ کتاب ریاضی هشتم:

با توجه به بردارهای داده شده، بردار موردنظر را رسم کنید.



پاسخ: با توجه به ضرب عدد در بردار، حاصل ضرب یک عدد مانند k در یک بردار مانند \vec{a} بردار جدیدی مانند \vec{b} است که طول آن k برابر بردار \vec{a} است. اگر k مثبت باشد \vec{b} و \vec{a} هم‌جهتند و اگر k عددی منفی باشد بردارهای \vec{b} و \vec{a} در خلاف جهت هم هستند. اکنون بردارها را رسم می‌کنیم.



اکنون به رابطه $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ دقت کنید، در واقع حاصل ضرب کمیت عددی $\frac{1}{q}$ در بردار \vec{F} است.

مسئله (۳۱) ذره‌ای با بار $q = +5\mu C$ در یک میدان الکتریکی قرار دارد و بر آن نیروی الکتریکی $1/5 N$ وارد می‌شود.

الف) میدان الکتریکی در محل ذره چند $\frac{N}{C}$ است؟

ب) اگر بار $q = -2\mu C$ را در همان نقطه قرار دهیم، نیروی وارد بر آن توسط میدان چند نیوتون است؟

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow E = \frac{1/5}{5 \times 10^{-6}} \Rightarrow E = 3 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

راه‌حل: الف) با توجه به تعریف میدان الکتریکی:

بار q مثبت است و نیرو و میدان هم‌جهت هستند.

$$\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow F = -2 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^5 \Rightarrow F = -0.6 N \Rightarrow |\vec{F}| = 0.6 N$$

ب) نیروی وارد بر بار منفی خواهد شد:

مفهوم این علامت منفی این است که نیروی وارد بر بار منفی در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

مسئله ۳۳) بر بار $q = -2 \text{ mC}$ در یک میدان الکتریکی نیروی $\vec{F} = 6 \times 10^{-4} \vec{i} - 8 \times 10^{-4} \vec{j}$ وارد می‌شود.

الف) میدان الکتریکی در محل بار q را بر حسب بردارهای \vec{i} و \vec{j} به دست آورید.

ب) بزرگی میدان الکتریکی چند نیوتون بر کولن است؟

راه حل: الف) با توجه به تعریف میدان الکتریکی:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \Rightarrow \vec{E} = \frac{6 \times 10^{-4} \vec{i} - 8 \times 10^{-4} \vec{j}}{-2 \times 10^{-3}} \Rightarrow \vec{E} = -0.3 \vec{i} + 0.4 \vec{j}$$

ب) بزرگی میدان الکتریکی برابر است با:

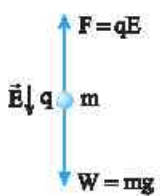
$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(-0.3)^2 + (0.4)^2} \Rightarrow |\vec{E}| = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

نیروی وارد بر بار الکتریکی در میدان الکتریکی

هرگاه بار q در میدان الکتریکی قرار گیرد، بر آن نیروی $\vec{F} = q\vec{E}$ وارد می‌شود. اگر بار q مثبت باشد، جهت نیروی وارد بر آن در جهت میدان الکتریکی و اگر بار q منفی باشد، جهت نیروی وارد بر آن در خلاف جهت میدان الکتریکی است.

مسئله ۳۴) ذره‌ای با بار $-5 \mu\text{C}$ و جرم 20 mg در یک میدان الکتریکی، معلق و در حال تعادل است، اندازه‌ی میدان و جهت آن را

مشخص کنید. ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

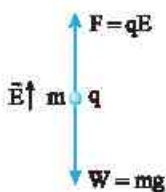


راه حل: ذره معلق و در حال تعادل است، بنابراین برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است. نیروی وزن می‌خواهد جسم را به پایین بکشد، بنابراین میدان الکتریکی باید به این ذره‌ی باردار نیروی F را مطابق شکل رو به بالا وارد کند. چون بار جسم منفی است، بنابراین جهت میدان الکتریکی رو به پایین است و اندازه‌ی آن خواهد شد:

$$\vec{F}_T = 0 \Rightarrow W = F \Rightarrow mg = |q|E \Rightarrow (20 \times 10^{-6}) \times 10 = 5 \times 10^{-6} \times E \Rightarrow E = 40 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

مسئله ۳۵) گلوله‌ای به جرم 10 گرم با بار الکتریکی $+5 \mu\text{C}$ را در یک میدان الکتریکی که مقدار آن در تمام نقاط $3 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ و

جهت آن در امتداد قائم و رو به بالا است، رها می‌کنیم. اندازه و جهت شتاب گلوله را بیابید. ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



راه حل: بار الکتریکی گلوله مثبت و جهت میدان الکتریکی رو به بالا است. نیروی وارد بر بار مثبت در جهت میدان (رو به بالا) خواهد بود (مطابق شکل):

$$F = qE = 5 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^4 = 0.15 \text{ N}$$

$$W = mg = 0.01 \times 10 \Rightarrow W = 0.1 \text{ N}$$

نتیجه می‌گیریم برآیند نیروهای وارد بر گلوله رو به بالا خواهد بود و شتاب نیز بنا به قانون دوم نیوتون رو به بالا است و اندازه‌ی آن برابر است با:

$$\vec{F}_T = m\vec{a} \Rightarrow 0.15 - 0.1 = 0.01 a \Rightarrow a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

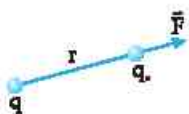
میدان الکتریکی بار نقطه‌ای

برای یافتن میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی r از آن، مطابق شکل بار آزمون q_0 را در فاصله‌ی

r از آن قرار می‌دهیم. بزرگی نیرویی که توسط بار q بر بار q_0 وارد می‌شود، برابر است با:

$$F = k \frac{|q| |q_0|}{r^2}$$

بنا به تعریف میدان الکتریکی در یک نقطه از فضا ($\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$) خواهیم داشت:

$$E = k \frac{|q|}{r^2}$$




تذکره: میدان الکتریکی بار نقطه‌ای در هر نقطه از فضا، همواره در راستای خطی است که بار را به نقطه‌ی موردنظر وصل می‌کند.

مسئله ۳۵ اختلاف بزرگی میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی ۴ و ۵ متری از آن برابر $9 \frac{N}{C}$ است. بزرگی میدان

در فاصله‌ی ۱ متری از بار نقطه‌ای q چند نیوتون بر کولن است؟

راه‌حل: با توجه به رابطه‌ی اندازه‌ی میدان الکتریکی بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی r خواهیم داشت:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = 9 \times 10^9 \times \frac{|q|}{(4)^2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{25}{16} \\ E_2 = 9 \times 10^9 \times \frac{|q|}{(5)^2} \end{cases}$$

از طرفی داریم:

$$E_1 - E_2 = 9 \Rightarrow E_1 - \frac{16}{25} E_1 = 9 \Rightarrow \frac{25E_1 - 16E_1}{25} = 9 \Rightarrow E_1 = 25 \frac{N}{C}$$

بنابراین میدان در نقطه‌ای به فاصله‌ی یک متری از بار نقطه‌ای q که آن را E_3 می‌نامیم، خواهد شد:

$$\frac{E_3}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_3}{25} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 \Rightarrow E_3 = 400 \frac{N}{C}$$

تست ۱۶ بزرگی میدان الکتریکی در فاصله‌ی ۲ cm از بار نقطه‌ای q_1 برابر E و در فاصله‌ی ۳ cm از بار نقطه‌ای q_2 برابر $\frac{2}{3}E$ است.

نسبت $\frac{|q_1|}{|q_2|}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{8}{27}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{27}{8}$

پس، رابطه‌ی بزرگی میدان الکتریکی بار نقطه‌ای را در دو حالت می‌نویسیم و بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E = k \frac{|q_1|}{2^2 \times 10^{-4}} \\ \frac{2}{3}E = k \frac{|q_2|}{3^2 \times 10^{-4}} \end{cases} \Rightarrow \frac{E}{\frac{2}{3}E} = \frac{|q_1|}{|q_2|} \times \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{|q_1|}{|q_2|} \times \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{8}{27}$$

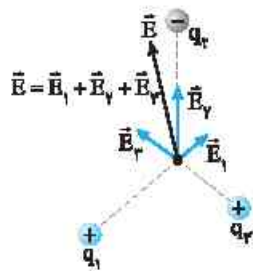
بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

میدان الکتریکی ناشی از چند بار نقطه‌ای

برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی ناشی از چند بار نقطه‌ای در یک نقطه از فضا، از اصل برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی استفاده می‌کنیم.

بنا بر اصل برهم‌نهی میدان‌های الکتریکی، میدان الکتریکی ناشی از چند بار الکتریکی در نقطه‌ای از فضا، برابر مجموع میدان‌هایی است که هر بار در نبود سایر بارها در آن نقطه از فضا ایجاد می‌کند:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$

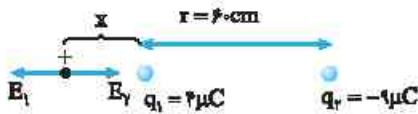


میدان الکتریکی \vec{E} در محل بار آزمون، جمع برداری

میدان‌های \vec{E}_1 ، \vec{E}_2 و \vec{E}_3 در محل این بار است.

مسئله (۳۶)

دو بار الکتریکی $q_1 = 4 \mu\text{C}$ و $q_2 = -9 \mu\text{C}$ در فاصله $r = 60 \text{ cm}$ از هم قرار دارند. در چه نقطه‌ای برآیند میدان الکتریکی دو بار صفر می‌شود؟



راه‌حل: نقطه‌ای که در آن اندازه‌ی میدان الکتریکی دو بار برابر می‌شود، باید به بار کوچک‌تر نزدیک‌تر باشد. از طرفی، میدان‌ها باید یک‌دیگر را خنثی کنند، بنابراین باید در خلاف جهت هم باشند. در نتیجه نقطه‌ی مورد نظر باید در خارج خط واصل دو بار باشد.

برای تعیین جهت میدان در یک نقطه یک بار فرضی مثبت در آن نقطه تصور می‌کنیم، بار q_1 مثبت بوده و مطابق شکل بر بار مثبت نیروی رانشی رو به چپ وارد کند. پس میدان بار q_1 ، یعنی E_1 به سمت چپ است و با همین استدلال، میدان بار q_2 که منفی است، رو به راست است. اکنون میدان‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

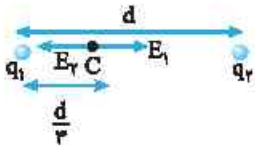
$$E_1 = E_2 \Rightarrow k \frac{|q_1|}{x^2} = k \frac{|q_2|}{(r+x)^2} \Rightarrow \frac{4}{x^2} = \frac{9}{(60+x)^2} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{3}{60+x} \Rightarrow 2x = 120 + 2x \Rightarrow x = 120 \text{ cm}$$

بنابراین در فاصله‌ی 120 cm از بار q_1 و 180 cm از بار q_2 میدان الکتریکی صفر است.

تست ۱۷: دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 به فاصله‌ی d از یک‌دیگر قرار دارند. اگر در نقطه‌ی C بین دو بار و به فاصله‌ی $\frac{d}{3}$ از بار q_1 بزرگی

میدان الکتریکی صفر باشد، نسبت $\frac{q_2}{q_1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) -4 (۴) 4



پسوخ، بین دو بار میدان صفر شده است، بنابراین میدان دو بار در خلاف جهت هم بوده است و دو بار همنام (یا هر دو مثبت یا هر دو منفی) هستند، که برای سادگی هر دو را مثبت گرفته‌ایم. اگر به شکل روبه‌رو دقت کنید، دلیل همنام بودن q_1 و q_2 را می‌فهمید. اما حل مسأله:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow k \frac{q_1}{\left(\frac{d}{3}\right)^2} = k \frac{q_2}{\left(\frac{2d}{3}\right)^2} \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = 4$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

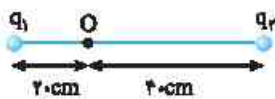
نتیجه

اگر دو بار همنام باشند، میدان بارها در هر نقطه روی خط واصل دو بار و بین دو بار در خلاف جهت هم خواهد بود. اگر دو بار ناهمنام باشند، جهت میدان‌های حاصل از دو بار روی خط واصل و بین دو بار هم‌جهت خواهد بود.

مسئله (۳۷)

در شکل روبه‌رو دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 به فاصله‌ی 60 cm از یک‌دیگر قرار دارند و میدان در نقطه‌ی O برابر \vec{E} است. اگر بار q_2 حذف شود، میدان در همان نقطه برابر $\frac{\vec{E}}{2}$ می‌شود. معلوم کنید که بارهای q_1 و q_2 همنامند یا

ناهمنام؟ نسبت $\frac{|q_2|}{|q_1|}$ را بیابید.



راه‌حل: در ابتدا میدان کل در نقطه‌ی O برابر است با:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E} \quad (1)$$

با حذف بار q_2 میدان در نقطه‌ی O ناشی از بار q_1 است، از این رو:

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{E}}{2} \quad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{\vec{E}}{2} + \vec{E}_2 = \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\vec{E}}{2} \quad (3)$$

پس q_1 و q_2 همنامند.

نسبت $\frac{|q_2|}{|q_1|} = 1$ است.

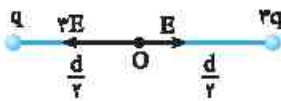


از مقایسه‌ی رابطه‌های (۲) و (۳)، نتیجه می‌شود میدان‌های E_1 و E_2 در نقطه‌ی O هم‌جهت بوده، بنابراین بارهای q_1 و q_2 ناهم‌نام هستند. از طرفی:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \frac{\vec{E}}{2} \\ \vec{E}_2 = \frac{\vec{E}}{2} \end{cases} \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow k \frac{|q_1|}{(0/2)^2} = k \frac{|q_2|}{(0/4)^2} \Rightarrow \frac{|q_2|}{|q_1|} = 4$$

تذکر: به روش حل دو مسأله زیر دقت کنید، برای حل چنین مسائلی، بهتر است این روش را به کار ببرید.

مسأله (۳۸) دو بار نقطه‌ای هم‌نام که بزرگی یکی از آن‌ها ۳ برابر دیگری است، در فاصله‌ی d از هم قرار دارند. بزرگی میدان برایند در وسط خط‌واصل دو بار برابر $150 \frac{N}{C}$ است. اگر بار کوچک‌تر را حذف کنیم، بزرگی میدان در همان نقطه چند نیوتون بر کولن می‌شود؟

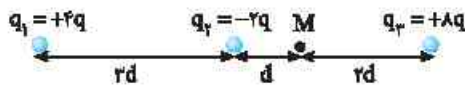


راه‌حل: اگر یکی از بارها q باشد، بنا به فرض مسأله بار دیگر ۳q است. در حل این مسائل به این روش عمل می‌کنیم که میدان بار q در نقطه‌ی O را E فرض می‌کنیم. در این صورت میدان بار ۳q در نقطه‌ی O، ۳E می‌شود. میدان‌های بارهای هم‌نام در بین دو بار در خلاف جهت هم هستند و اندازه‌ی برابرند آن‌ها برابر با تفاضل اندازه‌ی آن‌ها است. با توجه به فرض مسأله خواهیم داشت:

$$E_T = 3E - E = 2E \Rightarrow 2E = 150 \frac{N}{C} \Rightarrow E = 75 \frac{N}{C}$$

با حذف بار q، میدان در نقطه‌ی O تنها ناشی از بار ۳q است و برابر $3E = 3 \times 75 = 225 \frac{N}{C}$ خواهد شد.

مسأله (۳۹) اگر اندازه‌ی میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی نقطه‌ای +q در فاصله‌ی d از بار برابر $10^5 \frac{N}{C}$ باشد، در شکل روبه‌رو میدان الکتریکی برایند (خلص) حاصل از سه بار الکتریکی q_1 ، q_2 و q_3 در نقطه‌ی M را حساب کنید.



راه‌حل: میدان الکتریکی بار نقطه‌ای با مقدار بار نسبت مستقیم و با مجذور فاصله نسبت وارون دارد.

با توجه به فرض مسأله $E = k \frac{q}{d^2} = 10^5 \frac{N}{C}$ است.

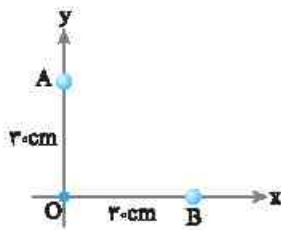
$$q_1 \text{ میدان بار: } E_1 = k \frac{4q}{(4d)^2} \Rightarrow E_1 = \frac{1}{4} k \frac{q}{d^2} = \frac{1}{4} \times 10^5 \frac{N}{C}$$

$$q_2 \text{ میدان بار: } E_2 = k \frac{2q}{d^2} \Rightarrow E_2 = 2k \frac{q}{d^2} = 2 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

$$q_3 \text{ میدان بار: } E_3 = k \frac{8q}{(2d)^2} \Rightarrow E_3 = 2 \frac{kq}{d^2} = 2 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

با توجه به جهت بردارهای E_1 ، E_2 و E_3 می‌توان نوشت:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \Rightarrow E_T = |E_1 - E_2 - E_3| = \left| \frac{1}{4} \times 10^5 - 2 \times 10^5 - 2 \times 10^5 \right| \Rightarrow E_T = 3/75 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

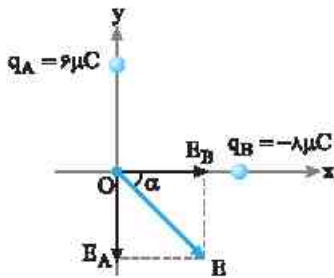


مسئله ۴۰ در شکل روبه‌رو دو بار نقطه‌ای $6 \mu\text{C}$ و $-8 \mu\text{C}$ به ترتیب در نقاط A و B قرار دارند.

الف) بردار میدان الکتریکی را در نقطه‌ی O بر حسب بردارهای یکه بنویسید.

ب) اندازه‌ی میدان را در نقطه‌ی O حساب کنید.

پ) زاویه‌ی آن را که بردار میدان برآیند با محور xها می‌سازد را بیابید.



راه‌حل: الف) در نقطه‌ی O یک بار مثبت فرضی در نظر می‌گیریم و به کمک

آن جهت میدان بارهای q_A و q_B را در نقطه‌ی O را مشخص می‌کنیم و

میدان‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \begin{cases} E_A = 9 \times 10^9 \times \frac{6 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-2}} = 6 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \\ E_B = 9 \times 10^9 \times \frac{8 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-2}} = 8 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}} \end{cases}$$

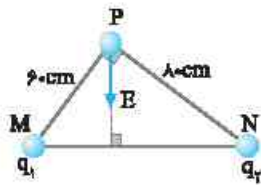
در این صورت میدان برآیند در نقطه‌ی O خواهد شد:

$$\vec{E} = 8 \times 10^5 \vec{i} - 6 \times 10^5 \vec{j}$$

ب) زاویه‌ی آن که بردار \vec{E} با محور xها می‌سازد، برابر است با:

$$\tan \alpha = \frac{-6 \times 10^5}{8 \times 10^5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{-3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 90^\circ + 37^\circ = 127^\circ \\ \alpha = -37^\circ \end{cases}$$

با توجه به شکل $\alpha = -37^\circ$ قابل قبول است.

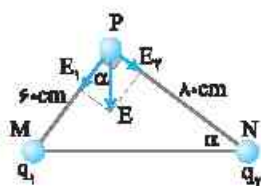


مسئله ۴۱ در شکل روبه‌رو، دو بار الکتریکی نقطه‌ای q_1 و q_2 در رأس‌های M و N مثلث قائم‌الزاویه‌ای ثابت شده‌اند. اگر قدرمطلق بار q_1 برابر $18 \mu\text{C}$ باشد و بردار میدان

الکتریکی خالص در نقطه‌ی P مطابق شکل باشد.

الف) نوع بارهای q_1 و q_2 را مشخص کنید.

ب) مقدار بار q_2 چند میکروکولن است؟



راه‌حل: الف) میدان E را در امتداد ضلع‌های PM و PN تجزیه می‌کنیم. مطابق

شکل میدان‌های E_1 و E_2 به ترتیب به سوی q_1 و q_2 هستند بنابراین بارهای

q_1 و q_2 هر دو منفی هستند.

ب) با توجه به شکل برای میدان‌های E_1 و E_2 به کمک مثلثات می‌توان

نوشت:

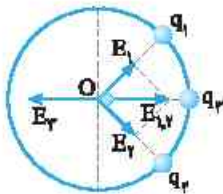
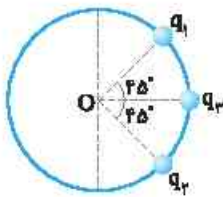
$$\tan \alpha = \frac{E_2}{E_1} \quad (1)$$

$$\tan \alpha = \frac{PM}{PN} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad (2) \quad \text{در مثلث PMN نیز می‌توان نوشت:}$$

در رابطه‌ی (۱) از رابطه‌ی (۲) جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{3}{4} \Rightarrow E_2 = \frac{3}{4} E_1 \Rightarrow k \frac{|q_2|}{(0.8)^2} = \frac{3}{4} k \frac{18}{(0.6)^2} \Rightarrow |q_2| = \frac{3}{4} \times \frac{18 \times 64}{36} \Rightarrow |q_2| = 24 \mu\text{C}$$

بنابراین $q_2 = -24 \mu\text{C}$ است.



مسئله ۴۲ اگر در شکل روبه‌رو $q_1 = q_2 = -4\mu\text{C}$ و میدان در مرکز دایره صفر باشد، q_3 چند میکروکولن است؟

راه‌حل: بردارهای میدان‌های بارهای q_1 و q_2 را رسم می‌کنیم. بارهای q_1 و q_2 هم‌اندازه و فاصله‌ی آن‌ها از O یکسان است بنابراین \vec{E}_1 و \vec{E}_2 هم‌اندازه هستند و همان‌گونه که بیان شد برآیند دو بردار هم‌اندازه روی نیم‌ساز آن‌ها قرار می‌گیرد. به شکل نگاه کنید $\vec{E}_{1,2}$ برآیند \vec{E}_1 و \vec{E}_2 است، برای آن‌که میدان در نقطه‌ی O صفر شود باید میدان q_3 در خلاف جهت $\vec{E}_{1,2}$ و هم‌اندازه‌ی آن باشد.

$$E_1 = E_2 = k \frac{|q|}{R^2}$$

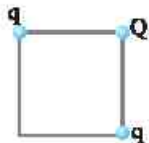
اندازه میدان‌های E_1 و E_2 را در O به دست می‌آوریم:

$$E_{1,2} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{2}E_1 = \sqrt{2}k \frac{|q_1|}{R^2}$$

برآیند آن‌ها را حساب می‌کنیم.

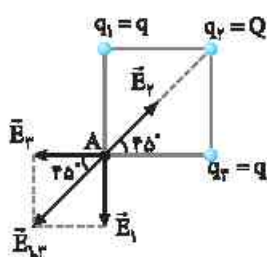
میدان E_3 را با $E_{1,2}$ برابر قرار می‌دهیم:

$$E_{1,2} = E_3 \Rightarrow \sqrt{2}k \frac{|q_1|}{R^2} \Rightarrow k \frac{|q_3|}{R^2} \Rightarrow |q_3| = \sqrt{2}|q_1| \Rightarrow q_3 = +4\sqrt{2}\mu\text{C}$$



مسئله ۴۳ مطابق شکل روبه‌رو، در سه رأس یک مربع، دو بار نقطه‌ای q و یک بار نقطه‌ی Q قرار داده‌ایم. نسبت $\frac{Q}{q}$ چقدر باشد، تا میدان الکتریکی در رأس چهارم مربع صفر شود؟

راه‌حل: در شکل زیر، میدان الکتریکی دو بار با اندازه‌ی یکسان q در رأس چهارم مربع (نقطه‌ی A) را با \vec{E}_1 و \vec{E}_3 نشان داده‌ایم. با این فرض که این دو بار مثبت باشند، اگر بار Q نیز مثبت باشد، برآیند میدان الکتریکی در نقطه‌ی A صفر نخواهد شد. همین‌طور اگر بارهای q، منفی باشند، آن‌گاه اگر بار Q هم منفی باشد، میدان در نقطه‌ی A صفر نخواهد شد، پس باید Q و q ناهمنام باشند. در شکل زیر، \vec{E}_3 میدان حاصل از بار Q در نقطه‌ی A است. با این فرض که بارهای q مثبت هستند و بار Q منفی است.



می‌دانیم $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_3|$ ، پس برآیند این دو بردار $\vec{E}_{1,3} = \vec{E}_1 + \vec{E}_3$ در امتداد قطر مربع

$$|\vec{E}_{1,3}| = \sqrt{E_1^2 + E_3^2} = \sqrt{2}E_1 = \frac{\sqrt{2}kq}{a^2}$$

قرار می‌گیرد و مقدار آن برابر است با:

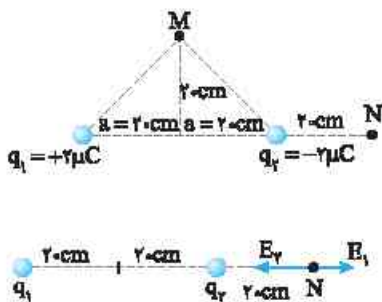
$$|\vec{E}_2| = \frac{k|Q|}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{k|Q|}{2a^2}$$

اندازه‌ی میدان بار Q در نقطه‌ی A برابر می‌شود با:

شرط صفر شدن میدان الکتریکی برآیند در نقطه‌ی A به صورت زیر خواهد بود:

$$E_{1,3} = E_2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}kq}{a^2} = \frac{k|Q|}{2a^2} \Rightarrow \frac{Q}{q} = -2\sqrt{2}$$

علامت منفی در رابطه‌ی اخیر به این معناست که بارهای q و Q باید مختلف‌العلامت باشند. فرض اولیه بر این بود که $q > 0$ و $Q < 0$. اگر فرض اولیه به صورت $q < 0$ و $Q > 0$ نیز باشد، جواب نهایی تغییر نخواهد کرد.



مسئله ۱۴۴ به دو بار یکسان $+q$ و $-q$ که در فاصله‌ی ثابت $2a$ از هم قرار دارند دو قطبی الکتریکی گویند. در شکل مقابل اندازه‌ی میدان الکتریکی دو قطبی در نقطه‌های N و M که M روی عمود منصف دو بار و N روی خط واصل دو بار قرار دارد، به دست آورید.

راه حل: میدان‌های ناشی از بارهای q_1 و q_2 را در نقطه‌ی N رسم می‌کنیم. سپس اندازه‌ی هر میدان را حساب می‌کنیم.

$$E_1 = k \frac{|q_1|}{r^2} \Rightarrow E_1 = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-6}}{(0.06)^2} = \frac{9 \times 2 \times 10^3}{36 \times 10^{-2}} \Rightarrow E_1 = 5 \times 10^4 \frac{N}{C}$$

$$E_2 = k \frac{|q_2|}{r^2} \Rightarrow E_2 = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-6}}{(0.02)^2} = \frac{9 \times 2 \times 10^3}{4 \times 10^{-2}} \Rightarrow E_2 = 45 \times 10^4 \frac{N}{C}$$

میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی N برابر است با:

$$E_N = E_2 - E_1 = 45 \times 10^4 - 5 \times 10^4 \Rightarrow E_N = 4 \times 10^5 \frac{N}{C}$$

فاصله‌ی q_1 و q_2 را از نقطه‌ی M به دست می‌آوریم.

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

اکنون میدان روی عمود منصف را به دست می‌آوریم.

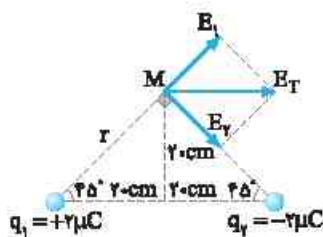
میدان‌های E_1 و E_2 با هم برابرند زیرا قدرمطلق بارهای q_1 و q_2 برابر و فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی M یکسان است.

$$E_1 = E_2 = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-6}}{(2\sqrt{2} \times 10^{-2})^2}$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{18 \times 10^3}{8 \times 10^{-2}} \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{9}{4} \times 10^5 \frac{N}{C}$$

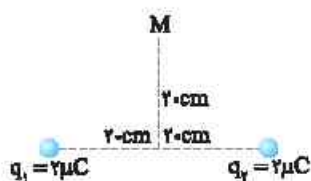
اکنون به کمک رابطه‌ی فیثاغورس اندازه‌ی میدان الکتریکی خالص را در نقطه‌ی M حساب می‌کنیم:

$$E_{TM} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{2} E_1 \Rightarrow E_{TM} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \times 10^5 \frac{N}{C}$$



مسئله ۱۴۵ میدان الکتریکی خالص دو بار الکتریکی $q_1 = q_2 = 2 \mu\text{C}$ روی

عمود منصف خط واصل دو بار در شکل رویه‌رو در نقطه‌ی M را حساب کنید.

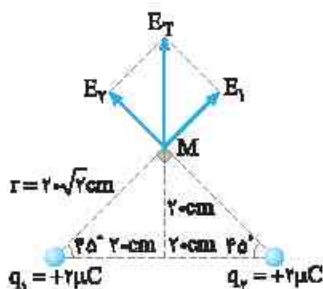


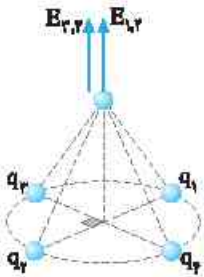
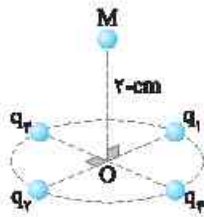
راه حل: میدان‌های بارهای q_1 و q_2 در نقطه‌ی M با هم برابر و بر هم عمودند.

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow E_1 = E_2 = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-6}}{(0.2\sqrt{2})^2} \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{9}{4} \times 10^5 \frac{N}{C}$$

میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی M خواهد شد:

$$E_{TM} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \Rightarrow E_{TM} = \sqrt{2} E_1 \Rightarrow E_{TM} = \frac{9\sqrt{2}}{4} \times 10^5 \frac{N}{C}$$





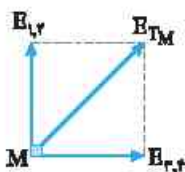
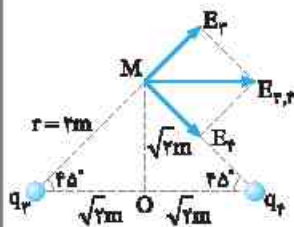
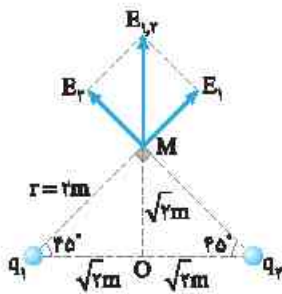
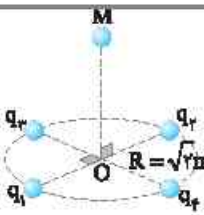
مسئله ۴۴ در شکل روبه‌رو چهار بار نقطه‌ای $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = +2\mu\text{C}$ روی محیط یک دایره در فاصله‌ی یکسان از هم قرار دارند. میدان الکتریکی خالص را در نقطه‌ی M واقع بر محور گذرنده از مرکز دایره حساب کنید. ($R = OM = 20\text{cm}$)

راه‌حل: نگران نباشید با مسئله سختی روبه‌رو نیستید. مسأله‌ی قبل را که میدان دو بار را بررسی می‌کرد، مرور کنید. در آن جا میدان دو بار را به دست آوردیم و مشاهده کردیم میدان خالص در امتداد عمود منصف و رو به بالا است. در این مسأله می‌توان میدان هر دو بار مقابل هم را مطابق مسأله‌ی قبل به دست آورده آن‌گاه به سادگی دو میدان به دست آمده را با هم جمع کرد و میدان الکتریکی خالص خواهد شد:

مقدار میدان‌های $E_{1,2}$ و $E_{3,4}$ را در مسأله‌ی قبلی به دست آورده‌ایم:

$$E_T = \frac{9\sqrt{2}}{4} \times 10^9 + \frac{9\sqrt{2}}{4} \times 10^9$$

$$E_T = \frac{9\sqrt{2}}{2} \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$



مثال: در شکل روبه‌رو چهار بار نقطه‌ای $q_1 = q_2 = q_3 = +2\mu\text{C}$ و $q_4 = -2\mu\text{C}$ روی محیط یک دایره در فاصله‌ی یکسان از هم قرار دارند. میدان الکتریکی خالص در نقطه‌ی M واقع بر محور گذرنده از مرکز دایره را حساب کنید. ($OM = \sqrt{2}rm$ و شعاع دایره $\sqrt{2}rm$ است.)

پسوخ: این گونه به چهار بار الکتریکی نگاه نکنید. این مسایل به راحتی قابل حل هستند. ابتدا میدان الکتریکی حاصل از بارهای q_1 و q_2 را به دست می‌آوریم.

$$r = \sqrt{(\sqrt{2}r)^2 + (\sqrt{2}r)^2} \Rightarrow r = 2rm$$

$$E_1 = E_2 = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow E_1 = E_2 = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-6}}{(2r)^2} \Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{9}{2} \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_{1,2} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{2}E_1 \Rightarrow E_{1,2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

این میدان در امتداد خط OM است. اکنون میدان الکتریکی ناشی از دو بار q_3 و q_4 را به دست می‌آوریم.

میدان‌های E_3 و E_4 هم‌اندازه میدان‌های E_1 و E_2 هستند. $E_3 = E_4 = \frac{9}{2} \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$

$$E_{3,4} = \sqrt{E_3^2 + E_4^2} \Rightarrow E_{3,4} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

میدان $E_{3,4}$ نیز خواهد شد:

این میدان بر خط OM عمود است.

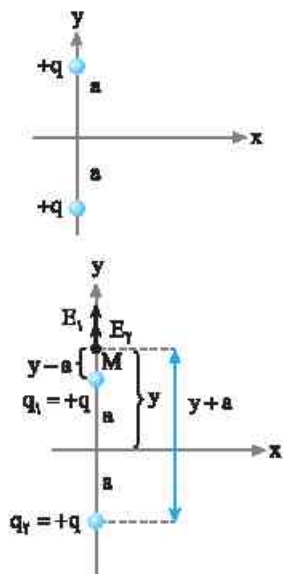
اکنون می‌توانید میدان‌های $E_{1,2}$ و $E_{3,4}$ را در نقطه‌ی M برای خود رسم کنید.

$$E_{TM} = \sqrt{E_{1,2}^2 + E_{3,4}^2} = \sqrt{2}E_{1,2}$$

$$\Rightarrow E_{TM} = \sqrt{2} \times \frac{9\sqrt{2}}{2} \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}} \Rightarrow E_{TM} = 9 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

مسئله‌ی خاص ۱

اکنون می‌خواهیم به سراغ حل یک مسئله خاص برویم، یک مسئله‌ی پارامتری با ریاضیات زیبا که برای درک آن باید حوصله کرد. باید با دقت مراحل مسئله را بجویم و سپس به راحتی قورت دهیم. به نتیجه‌ی زیبای انتهایی این مسئله دقت کنیم تا درک ما از مفهوم بار نقطه‌ای بالاتر رود.



مسئله (۴۷) دو بار نقطه‌ای همنام $+q$ مطابق شکل در نقاط $y = -a$ و $y = +a$ قرار دارند. الف) میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور y ها به فاصله‌ی y از مبدأ مختصات را بیابید. ($y > a$)
ب) میدان الکتریکی را در نقطه‌ای روی عمودمنصف خط واصل دو بار و به فاصله‌ی x از مبدأ بیابید.

راه حل: الف) فاصله‌ی بار q_1 تا نقطه‌ی مورد نظر برابر $y - a$ و فاصله‌ی بار q_2 تا آن نقطه برابر $y + a$ است. میدان‌های ناشی از دو بار را نمایش می‌دهیم. میدان‌ها هم‌جهت بوده و با هم جمع می‌شوند و میدان بار نزدیک‌تر به نقطه‌ی مورد نظر از میدان بار دیگر بزرگ‌تر است. میدان‌ها را به دست آورده و با هم جمع می‌کنیم:

$$E_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} \Rightarrow E_1 = k \frac{q}{(y-a)^2}$$

$$E_2 = k \frac{q_2}{r_2^2} \Rightarrow E_2 = k \frac{q}{(y+a)^2}$$

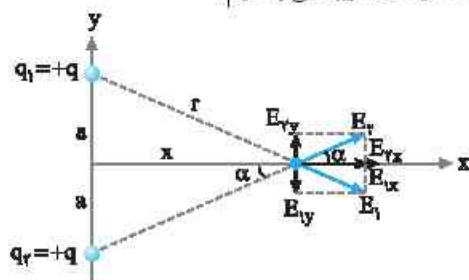
$$E = E_1 + E_2 \Rightarrow E = kq \left(\frac{1}{(y-a)^2} + \frac{1}{(y+a)^2} \right)$$

$$\Rightarrow E = kq \times \frac{y^2 + a^2 + 2ay + y^2 + a^2 - 2ay}{(y^2 - a^2)^2}$$

مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\Rightarrow E = \frac{2kq(y^2 + a^2)}{(y^2 - a^2)^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{2kq(y^2 + a^2)}{(y^2 - a^2)^2} \vec{j}$$

به مقدار عجیب به دست آمده نگاه نکنید. اگر این مسئله را عددی به شما ارائه می‌دادیم به راحتی آن را حل می‌کردید. اکنون به سراغ قسمت ب می‌رویم و سپس با یک پرسش شما را به یک نتیجه‌ی زیبا می‌رسانیم.



$$r = \sqrt{a^2 + x^2}$$

میدان هر بار را در نقطه‌ی مورد نظر به دست می‌آوریم:

$$E_1 = E_2 = k \frac{q}{r^2} \Rightarrow E_1 = E_2 = k \frac{q}{(a^2 + x^2)}$$

مؤلفه‌های E_{1y} و E_{2y} یک‌دیگر را خنثی می‌کنند. در این صورت میدان برابند برابر است با:

$$E = E_{1x} + E_{2x} \xrightarrow{E_{1x} = E_{2x}} E = 2E_{1x} \Rightarrow E = 2E_1 \cos \alpha$$

با توجه به شکل $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ است، از این رو:

$$E = 2k \frac{q}{a^2 + x^2} \times \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow E = \frac{2kqx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \vec{E} = \frac{2kqx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i}$$

۱ هدف از ارائه‌ی این مسئله‌ی خاص همان‌گونه که بیان می‌شود نتیجه‌ای است که از آن می‌خواهیم به دست آوریم. این نوع مسایل در برنامه‌ی رسمی کتاب درسی نیست.



پرسش: اگر در مسأله‌ی قبل فاصله‌ی نقطه‌ی مشاهده نسبت به a بسیار بزرگ باشد ($x \gg a$ و یا $y \gg a$) میدان الکتریکی چگونه خواهد بود؟

پاسخ: وقتی مقدار $y \gg a$ باشد در واقع y^2 آن قدر از a^2 بزرگ‌تر است که می‌توان در رابطه‌ی $E = \frac{2kq(y^2 + a^2)}{(y^2 - a^2)^2}$ از a^2

صرف نظر کرد و آن را از رابطه برداشت. در این صورت:

$$E = \frac{2kq(y^2)}{(y^2)^2} = E = k \frac{2q}{y^2}$$

مانند این است که یک بار نقطه‌ای ($2q$) در مرکز مختصات قرار دارد و شما میدان الکتریکی آن را در فاصله‌ی y از بار به دست آورده‌اید.

برای میدان روی عمود منصف دو بار نیز همین گونه است وقتی $x \gg a$ باشد، می‌توان a^2 را از رابطه حذف کرد.

$$E = \frac{2kqx}{(a^2 + x^2)^2} \xrightarrow[\text{حذف } a^2]{a^2 \gg a^2} E = \frac{2kqx}{(x^2)^2} \Rightarrow E = k \frac{2q}{x^2}$$

نتیجه در فاصله‌ی دور از این دو بار نقطه‌ای می‌توان به جای دو بار q ، یکبار $2q$ را در وسط خط واصل دو بار در نظر گرفت و میدان را به دست آورد.

این نتیجه، سرآغاز این مطلب است که در فواصل دور از اجسام گسترده‌ی باردار، می‌توان آن‌ها را به صورت بار نقطه‌ای فرض کرد. مثلاً میدان یک کره‌ی باردار با بار q در فواصل دور از کره را می‌توان میدان ذره‌ی بارداری در مرکز کره در نظر گرفت.

خطوط میدان الکتریکی

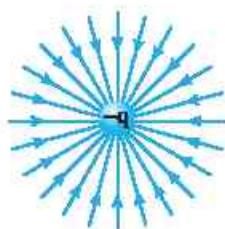


در انیمیشن‌ها بارها دیده‌اید که وقتی ضربه‌ای به سر یکی از شخصیت‌های ماجرا وارد می‌شود، برای نشان دادن گیجی شخص دور سر او تعدادی ستاره در حال حرکت یا گنجشک در حال حرکت رسم می‌کنند تا شما به گیجی شخص پی ببرید و با برطرف شدن گیجی شخص آرام آرام ستاره‌های دور سر او نیز محو می‌شود. برای نمایش میدان الکتریکی اطراف یک بار الکتریکی نیز باید روشی انتخاب کنیم تا وجود میدان اطراف بار و ضعیف شدن میدان در فاصله‌ی دورتر و آرایش میدان را بتوانیم نمایش دهیم.

تعریف خط‌های میدان، برای رسم و تجسم میدان الکتریکی در فضای اطراف اجسام باردار از خط‌های فرضی جهت‌داری موسوم به «خطوط میدان الکتریکی» استفاده می‌شود.

ویژگی‌های خطوط میدان الکتریکی

۱) خطوط میدان از بارهای مثبت خارج شده و به بارهای منفی منتهی می‌شوند. در شکل‌های زیر خطوط میدان الکتریکی برای یک ذره باردار رسم شده است.

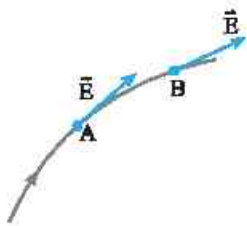


الف) خطوط میدان الکتریکی در جهت دور شدن از ذره‌ی باردار $+q$ است.

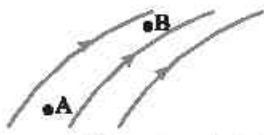


ب) خطوط میدان الکتریکی به سمت ذره‌ی باردار $-q$ است.

۲) میدان در هر نقطه، برداری است مماس بر خط میدانی که از آن نقطه می‌گذرد و با آن خط میدان، هم‌جهت است.



۳) تراکم خطوط میدان با بزرگی میدان متناسب است. در هر ناحیه که میدان قوی‌تر باشد، خطوط میدان، به یک‌دیگر نزدیک‌تر و فشرده‌ترند. ($E_A < E_B$)



۴) خطوط میدان بر اینند به جز در محل بار هیچ‌گاه یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی از هر نقطه فقط یک خط میدان می‌گذرد. در هر نقطه‌ای فضا فقط یک میدان الکتریکی وجود دارد که همان میدان الکتریکی خالص (برایند) است.

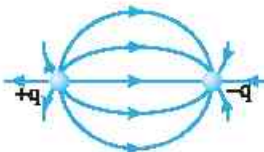
پرسش: چرا در ویژگی‌های خطوط میدان الکتریکی بیان می‌کنیم که این خطوط هرگز یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند؟

پاسخ: اگر فرض کنیم دو خط میدان الکتریکی یک‌دیگر را قطع می‌کنند (مطابق شکل روبه‌رو) در این صورت در این نقطه دو مماس می‌توان رسم کرد یعنی در یک نقطه دو میدان الکتریکی خالص وجود دارد در حالی که می‌دانیم در هر نقطه تنها یک میدان الکتریکی خالص وجود دارد از این رو دو خط میدان نمی‌توانند یک‌دیگر را قطع کنند.

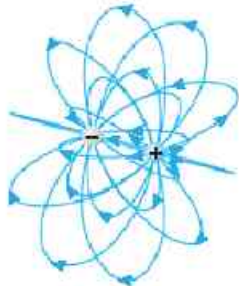


پرسش: خطوط میدان الکتریکی یک دو قطبی الکتریکی را رسم کنید.

پاسخ: می‌دانیم دو قطبی الکتریکی یعنی دو بار یکسان $+q$ و $-q$ که در فاصله‌ای ثابتی از هم قرار دارند.



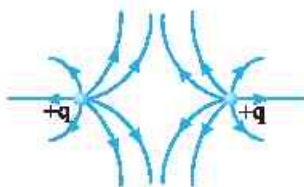
البته شکل واقعی خط‌های میدان الکتریکی دو قطبی مطابق شکل روبه‌رو سه بعدی است.



نمایش سه‌بعدی خطوط میدان برای یک دو قطبی الکتریکی

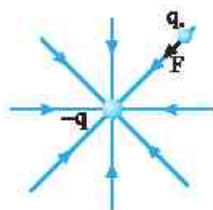
پرسش: خطوط میدان الکتریکی دو بار هم‌نام $+q$ را رسم کنید.

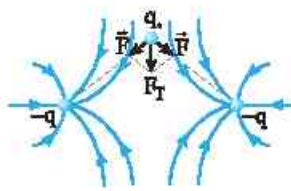
پاسخ: خطوط میدان از دو بار مثبت خارج می‌شوند و در وسط خط واصل دو بار، میدان صفر است. از طرفی دو بار هم‌اندازه هستند، بنابراین خطوط میدان به شکل روبه‌رو و دارای تقارن نسبت به خط عمودمنتصف است.



پرسش: آیا اگر یک ذره باردار در یک میدان الکتریکی رها شود، الزاماً مسیر حرکتش روی خط میدان است؟ توضیح دهید.

پاسخ: اگر یک بار آزمون q مطابق شکل در مجاورت بار نقطه‌ای $-q$ رها شود، بار در امتداد خط میدان حرکت خواهد کرد.

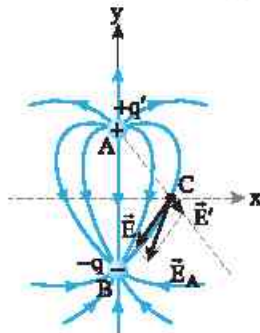




اما اگر همین بار به طور متال روی عمود منصف دو بار همنام و هم اندازه‌ی $-q$ قرار گیرد و رها شود، مطابق شکل رو به وسط پاره خط واصل دو بار حرکت می‌کند که کاملاً مشخص است این مسیر در امتداد خط‌های خمیده‌ی میدان نخواهد بود.

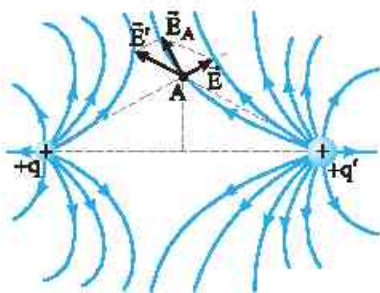
نتیجه ← هرگاه یک ذره‌ی باردار در یک میدان الکتریکی رها شود، لزومی ندارد که مسیر حرکت آن در امتداد یکی از خط‌های میدان باشد.

پرسش: اگر دو بار مختلف‌العلامت هم‌اندازه نباشند شکل خطوط میدان چگونه خواهد بود؟ ($|q| > |q'|\$)



پاسخ اگر دو بار مثبت و منفی هم‌اندازه نباشند تعداد خط‌های میدان بار بزرگ‌تر بیش‌تر است و نزدیک بار کوچک‌تر خطوط میدان، انحنای بیش‌تری دارند و نزدیک بار بزرگ‌تر خطوط میدان انحنای کم‌تری داشته و به خط راست نزدیک‌تر هستند. اگر روی عمود منصف پاره خط واصل دو بار در نقطه‌ای مانند C دو میدان مربوط به دو بار $+q'$ و $-q$ را رسم کنیم، با توجه به این که فاصله‌ی این نقطه از دو نقطه‌ی A و B یکسان است و اندازه‌ی بار منفی بزرگ‌تر از اندازه‌ی بار مثبت فرض شده است، \vec{E} از \vec{E}' بزرگ‌تر است و برآیند آن‌ها موازی خط واصل دو بار نمی‌شود. خط میدان در نقطه‌ی C بر این بردار مماس است و خطوط میدان مطابق شکل می‌شوند.

پرسش: اگر دو بار $+q$ و $+q'$ ($q' > q$) در دو طرف یک پاره خط قرار گیرند، شکل خطوط میدان چگونه خواهد بود؟



پاسخ چون بارها هم‌اندازه نیستند شکل متقارن نخواهد بود و خطوط نزدیک بار کوچک‌تر انحنای بیش‌تری دارند، دقت کنید خط‌های خروجی از بار بزرگ‌تر نیز همواره با تعداد بیش‌تری رسم می‌شوند. اگر روی عمود منصف پاره خط واصل دو بار در نقطه‌ای مانند A دو میدان \vec{E} و \vec{E}' حاصل از دو بار q و q' را رسم کنیم، $E' > E$ است زیرا $q' > q$ بزرگ‌تر است. پس برآیند این دو بیش‌تر به E' نزدیک است و منطبق بر راستای عمود منصف نمی‌شود. خط میدان در نقطه‌ی A باید مماس بر \vec{E}_A رسم شود.

تست ۸، دو بار هم‌اندازه و هم‌نام در دو نقطه‌ی A و B قرار گرفته‌اند. با حرکت از A به سمت B میدان چگونه تغییر می‌کند؟



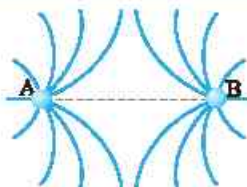
(۱) افزایش می‌یابد.

(۲) کاهش می‌یابد.

(۳) ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

(۴) ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

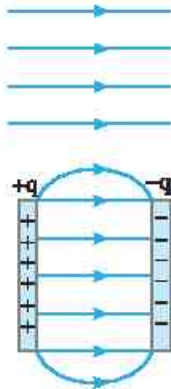
پاسخ با توجه به شکل خطوط میدان، با حرکت از A به سمت B تراکم خطوط تا وسط پاره خط واصل دو بار کاهش و سپس افزایش می‌یابد. بنابراین میدان الکتریکی ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد و گزینه‌ی (۴) درست است.



میدان الکتریکی یکنواخت

تعریف ← به میدان الکتریکی که اندازه، راستا و جهت آن در قسمتی از فضا ثابت باشد میدان الکتریکی یکنواخت گفته می‌شود.

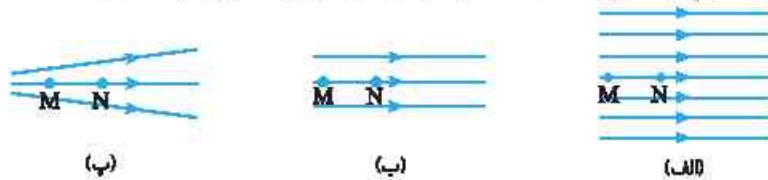
پرسش: خطوط میدان الکتریکی یکنواخت چگونه رسم می‌شود؟



پاسخ: از آن‌جا که تراکم خطوط مشخص‌کننده اندازه‌ی میدان است، بنابراین وقتی میدان الکتریکی در یک فضا یکنواخت است باید تراکم خط‌های میدان در همه‌ی نقاط آن فضا یکسان باشد، یعنی باید خط‌های میدان را به صورت خط‌های موازی با فاصله‌های یکسان رسم کرد.

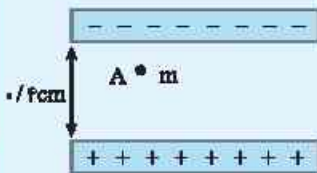
برای ایجاد میدان الکتریکی یکنواخت از دو صفحه‌ی رسانای موازی بردار که فاصله‌ی آن‌ها از هم کم و بار صفحه‌ها هم‌اندازه و ناهم‌نام است، استفاده می‌شود. در این حالت میدان در فضای بین این دو صفحه و دور از لبه‌ها، یکنواخت است.

پرسش: در شکل‌های زیر، خطوط میدان الکتریکی در سه ناحیه از فضا رسم شده است. اگر ذره‌ی باردار با بار مثبت q را در نقطه‌ی M قرار داده و رها کنیم، در مسیر M تا N ، شتاب حرکت ذره در هر شکل چگونه است؟



پاسخ: میدان الکتریکی در شکل (الف) و هم‌چنین شکل (ب) یکنواخت است و میدان از M تا N ثابت است، بنابراین شتاب حرکت ذره ثابت است. اما در شکل (الف) تراکم خط‌های میدان بیشتر و میدان قوی‌تر است، بنابراین نیروی وارد بر ذره و در نتیجه شتاب ذره در شکل (الف) از شکل (ب) بیشتر است. اما در شکل (ب) میدان الکتریکی یکنواخت نیست و با توجه به شکل از M تا N میدان در حال کاهش و نیروی وارد بر ذره نیز در حال کاهش است. بنابراین شتاب حرکت ذره ثابت نیست و از M تا N شتاب در حال کاهش است. اما در هر سه شکل از M تا N سرعت در حال افزایش است.

تست ۹: در شکل روبه‌رو ذره‌ای با بار $-2pC$ و جرم $1mg$ را در یک میدان الکتریکی یکنواخت $\frac{N}{C}$ در نقطه‌ی A مجبور صفحه‌ی منفی قرار داده و رها می‌کنیم. سرعت رسیدن گلوله به صفحه‌ی مثبت چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) 0.4
- (۲) 0.2
- (۳) 0.4
- (۴) 0.04

پس‌خ، بنا به قضیه‌ی کار و انرژی، کار نیروی خالص برابر تغییر انرژی جنبشی جسم است. نیروهای وارد بر ذره را رسم می‌کنیم و برابری نیروها خواهد شد:

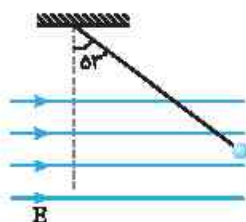
$$F_T = F_E + mg$$

$$W_T = \Delta K \Rightarrow (qE + mg)d = \frac{1}{2}mv^2$$

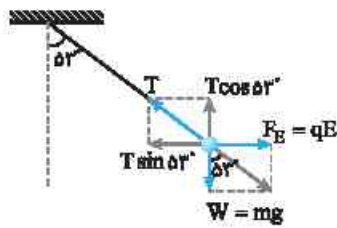
$$(2 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^6 + 10^{-6} \times 10) \times 4 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 10^{-6} v^2 \Rightarrow v^2 = 0.16 \Rightarrow v = 0.4 \frac{m}{s}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

حل دو مسأله‌ی خاص برای میدان الکتریکی یکنواخت



مسأله (۴۸) در شکل روبه‌رو ذره‌ای به جرم 60 میلی‌گرم با بار $10 \mu C$ در یک میدان الکتریکی یکنواخت از ریسمان سبکی آویزان و در تعادل است. بزرگی میدان و نیرویی که ریسمان بر ذره وارد می‌کند را بیابید. ($\sin 53^\circ = 0.8$)



راه حل: ابتدا نیروهای وارد بر ذره را رسم می‌کنیم. بر ذره سه نیرو وارد می‌شود:

(۱) نیروی وزن توسط کره زمین W

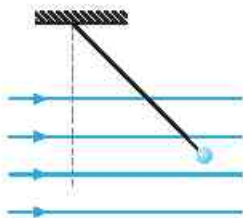
(۲) نیروی الکتریکی توسط میدان F_E

(۳) نیروی ریسمان (T)

$$\tan \Delta r = \frac{F_E}{W} \Rightarrow \frac{\sin \Delta r}{\cos \Delta r} = \frac{qE}{mg} \Rightarrow \frac{0.8}{0.6} = \frac{10 \times 10^{-6} \times E}{60 \times 10^{-6} \times 10} \Rightarrow E = 80 \frac{N}{C}$$

برای به دست آوردن نیروی ریسمان T را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم. چون ذره در تعادل است، مؤلفه‌ی قائم T با وزن ذره برابر است:

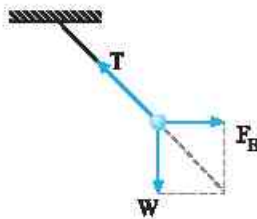
$$T \cos \Delta r = mg \Rightarrow T \times 0.6 = 60 \times 10^{-6} \times 10 \Rightarrow T = \frac{6 \times 10^{-4}}{0.6} \Rightarrow T = 10^{-3} N$$



مسئله ۴۹ در شکل روبه‌رو یک ذره با جرم $20g$ دارای بار الکتریکی $4 \mu C$ از یک

ریسمان سبک آویزان و در یک میدان الکتریکی یکنواخت در حال تعادل است. اگر میدان الکتریکی ناگهان حذف شود، ذره بلافاصله پس از حذف میدان با شتاب $2 \frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت

می‌کند. بزرگی میدان الکتریکی را بیابید.



راه حل: مسأله‌ی زیبایی است. نیروهای وارد بر ذره مطابق شکل سه نیروی وزن

$W = mg$ ، نیروی الکتریکی $F = qE$ و نیروی کشش نخ است که برآیند آن‌ها

صفر است. هرگاه برآیند سه بردار صفر شود، اندازه‌ی هر یک از آن بردارها هم اندازه‌ی بردار برآیند دو بردار دیگر است:

$$\vec{F}_E + \vec{W} + \vec{T} = 0 \Rightarrow |\vec{W} + \vec{T}| = |\vec{F}_E|$$

بلافاصله پس از حذف میدان و حذف F ، دو نیروی T و W باقی می‌مانند که برآیند آن‌ها هم اندازه‌ی نیروی F بوده است، از این رو:

$$F_T = ma \Rightarrow |\vec{T} + \vec{W}| = ma \Rightarrow F_E = ma \Rightarrow qE = ma \Rightarrow 4 \times 10^{-6} \times E = 2 \times 10^{-2} \times 2 \Rightarrow E = 10^4 \frac{N}{C}$$

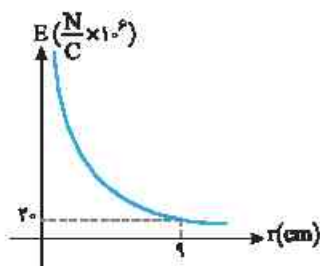
تمرین‌های تشریحی بخش سوم

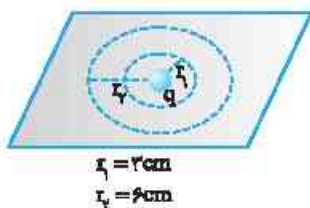
۶۵- بر بار الکتریکی $2 \mu C$ در یک نقطه از میدان الکتریکی، نیروی برابر $5 \times 10^{-2} N$ وارد می‌شود، اندازه‌ی میدان الکتریکی را در این نقطه محاسبه کنید. (تجربی - خرداد ۹۳)

۶۶- نمودار $E-r$ ذره‌ای مطابق شکل روبه‌رو است،

الف) بار ذره را محاسبه کنید.

ب) اندازه‌ی میدان در $r = 3m$ برابر چند نیوتون بر کولن است؟

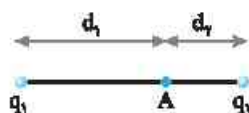




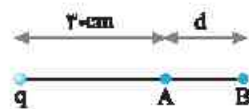
۶۷- مطابق شکل ذره‌ی باردار ی درون صفحه‌ای قرار دارد. اگر بزرگی میدان روی محیط دایره‌ی (۱)، 3×10^7 نیوتون بر کولن از بزرگی میدان روی محیط دایره‌ی (۲) بیش‌تر باشد، اندازه‌ی بار ذره $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$ را بیابید.

۶۸- اگر ذره‌ای با بار $q = -2 \mu C$ را در میدانی که بردار آن در SI به صورت $\vec{E} = (1/\sqrt{5}\vec{i} - 2\vec{j}) \times 10^7$ است، قرار دهیم،
الف) بردار نیرو و واتدازه‌ی نیرو را محاسبه کنید؟
ب) اگر جرم ذره $5g$ باشد و ذره تنها تحت تأثیر نیروی الکتریکی باشد شتاب را به دست آورید.

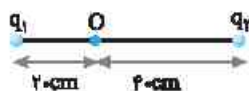
۶۹- میدان الکتریکی حاصل از دو بار نقطه‌ای $q_1 = +2 \mu C$ و $q_2 = +32 \mu C$ در فاصله‌ی 16 سانتی‌متری از بار q_2 صفر می‌باشد. فاصله‌ی دو بار الکتریکی از یکدیگر چند سانتی‌متر است؟
(ریاضی - خرداد ۹۳)



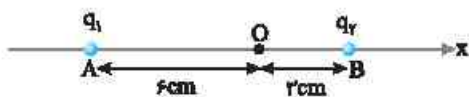
۷۰- در شکل رویه‌رو بزرگی میدان الکتریکی حاصل از دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در نقطه‌ی A برابر E است. اگر بار q_1 خنثی شود، میدان الکتریکی در نقطه‌ی A بدون تغییر جهت برابر $E/5$ می‌شود. دو بار را از نظر علامت و اندازه مقایسه کنید ($d_1 > d_2$).



۷۱- در شکل مقابل اگر اندازه‌ی میدان الکتریکی حاصل از بار نقطه‌ای q در نقاط A و B به ترتیب E_A و E_B و $E_A = 2/25 E_B$ باشد، d چند سانتی‌متر است؟



۷۲- در شکل رویه‌رو شدت میدان حاصل از دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 در نقطه‌ی O برابر \vec{E} است. اگر بار q_1 را خنثی کنیم، میدان در نقطه‌ی O برابر $-\vec{E}$ می‌شود. نسبت $\frac{q_1}{q_2}$ را به دست آورید.



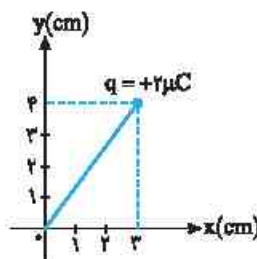
۷۳- دو ذره‌ی باردار $q_1 = +4 \mu C$ و $q_2 = +2 \mu C$ در نقطه‌های A و B روی محور x، مطابق شکل ثابت شده‌اند.
(ریاضی - خرداد ۹۴)

الف) میدان الکتریکی برآیند در نقطه‌ی O مبدأ مختصات را (در SI) محاسبه کنید و آن را بر حسب بردارهای یک‌ه بنویسید.

ب) اگر در نقطه‌ی O ذره‌ای با بار الکتریکی $-5 \mu C$ قرار دهیم، نیروی الکتریکی وارد بر ذره را در (در SI) بر حسب بردارهای یک‌ه محاسبه کنید.

$$(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$$

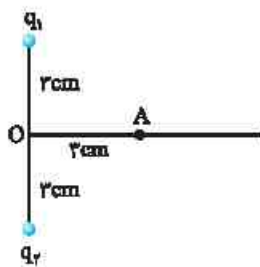
۷۴- بار $3/6 \mu C$ در مبدأ مختصات قرار دارد. اگر بار $1 \mu C$ در نقطه‌ی A ($6m, 0$) و بار q در نقطه‌ی B ($3m, 0$) قرار گیرد، میدان الکتریکی در نقطه‌ی C ($9m, 0$) برابر $10^3 \frac{N}{C}$ و خلاف جهت با محور xها می‌شود. مقدار q را به دست آورید. $(k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$



۷۵- الف) در شکل رویه‌رو میدان حاصل از بار q را، در مبدأ بر حسب بردارهای

$$\vec{i} \text{ و } \vec{j} \text{ بنویسید. } (k = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2})$$

ب) بار $q' = +2 \mu C$ را در کدام نقطه قرار دهیم تا میدان خالص در مبدأ صفر شود؟



۷۶- دو بار الکتریکی نقطه‌ای همنام $q_1 = q_2 = 5 \mu\text{C}$ مطابق شکل به فاصله‌ی ۶ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند.

(نچربی - خرداد ۹۱)

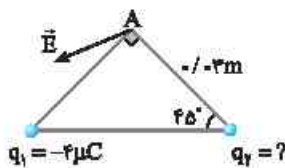
الف) اندازه‌ی میدان الکتریکی در نقطه‌ی A واقع بر عمودمنصف خط واصل دو بار، در فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر از نقطه‌ی O چند نیوتون بر کولن است؟
ب) جهت میدان الکتریکی را در نقطه‌ی A با رسم شکل تعیین کنید.

$$(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$

۷۷- دو بار الکتریکی ذره‌ای $q_1 = -q_2 = 10 \mu\text{C}$ در فاصله‌ی ۶ cm از یکدیگر ثابت شده‌اند. میدان الکتریکی را روی عمودمنصف خطی که دو ذره را به یکدیگر وصل می‌کند و به فاصله‌ی ۳ cm از وسط خط واصل دو ذره، به دست آورید. (با رسم شکل)

(ریاضی - دی ۹۱)

$$(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$



۷۸- در شکل روبه‌رو دو ذره‌ی باردار q_1 و q_2 در دو رأس یک مثلث متساوی‌الساقین ثابت شده‌اند و \vec{E} میدان الکتریکی حاصل از این دو بار، در رأس قائم‌الزاویه‌ی A است.

(ریاضی - خرداد ۹۱)

الف) بار q_2 مثبت یا منفی؟

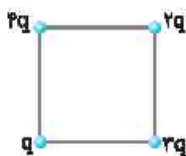
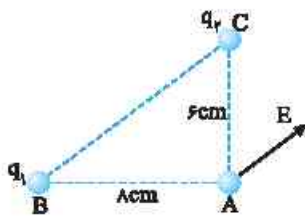
ب) اگر $q_1 = -4 \mu\text{C}$ باشد، اندازه‌ی بار q_2 را طوری تعیین کنید که بزرگی میدان

$$\text{الکتریکی } \vec{E} \text{ برابر } 5 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}} \text{ باشد. } (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$

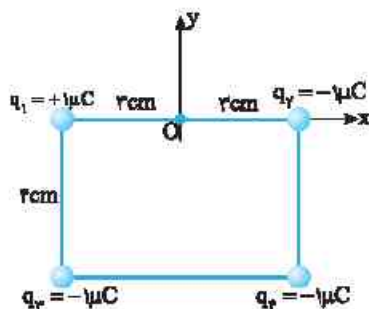
۷۹- در شکل روبه‌رو میدان در رأس قائمه‌ی A با خط BC موازی است.

الف) علامت q_1 و q_2 را مشخص کنید.

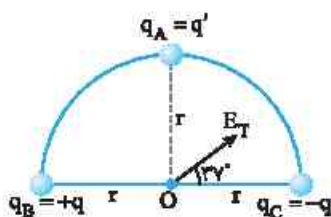
ب) نسبت $\frac{q_1}{q_2}$ را بیابید.



۸۰- اگر در یک رأس مربعی بار الکتریکی q قرار گیرد، اندازه‌ی میدان حاصل از آن در مرکز مربع \vec{E} خواهد بود. در صورتی که در چهار رأس این مربع بارهای الکتریکی مطابق شکل روبه‌رو قرار گیرد، اندازه‌ی میدان در مرکز آن چند برابر E است؟

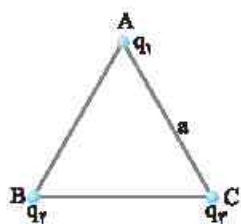


۸۱- میدان الکتریکی خالص (برآیند) ناشی از چهار بار را در نقطه‌ی O برحسب بردارهای \vec{i} و \vec{j} بنویسید.



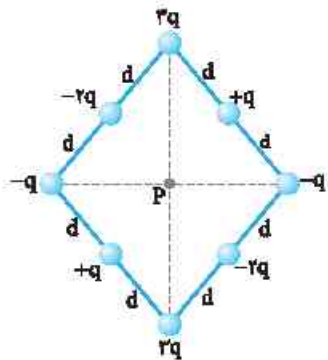
۸۲- در شکل روبه‌رو سه بار q_A ، q_B و q_C روی محیط نیم‌دایره قرار دارند. جهت میدان الکتریکی برآیند در مرکز نیم‌دایره مطابق شکل است. بار الکتریکی q_A چند برابر بار

$$\text{الکتریکی } q_B \text{ است؟ } (\sin 37^\circ = \cos 53^\circ = 0/6)$$

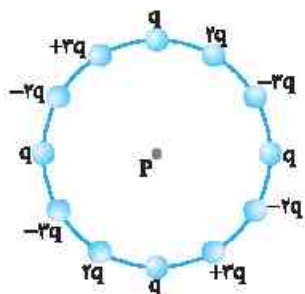


۸۳- در گوشه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع $a = 1\text{m}$ مطابق شکل بارهای $q_1 = -3\mu\text{C}$ و $q_2 = q_3 = +3\mu\text{C}$ قرار دارند. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P (وسط ضلع BC) به دست آورید. اگر بار $-4\mu\text{C}$ در نقطه‌ی P قرار گیرد، چه نیرویی بر آن وارد می‌شود؟

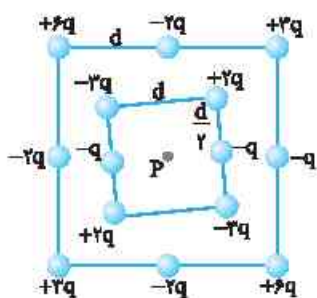
۸۴- در شکل زیر میدان خالص در نقطه‌ی P را به دست آورید.



۸۵- در شکل زیر میدان خالص در نقطه‌ی P را به دست آورید.



۸۶- در شکل زیر میدان خالص در نقطه‌ی P را به دست آورید.

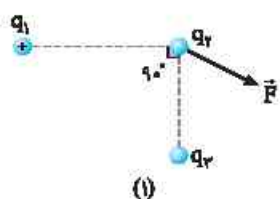
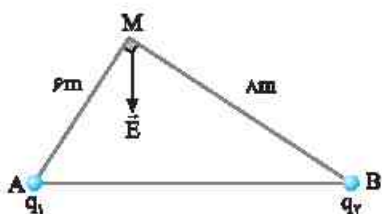


۸۷- در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی بار q_2 برابر 1mC است اما علامت آن مشخص نیست. میدان الکتریکی حاصل از دو بار q_1 و q_2 در نقطه‌ی M برابر \vec{E} بوده و امتداد آن بر خط AB عمود است.

الف) علامت بارهای q_1 و q_2 را مشخص کنید.

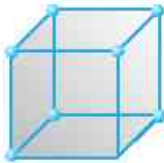
ب) مقدار بار q_2 را به دست آورید.

۸۸- در شکل (۱) \vec{F} بر آینه‌ی نیروهای وارد بر بار q_2 است. نوع بار q_1 و q_2 را مشخص کنید. (ریاضی - دی ۹۱)

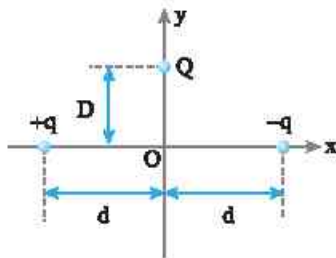




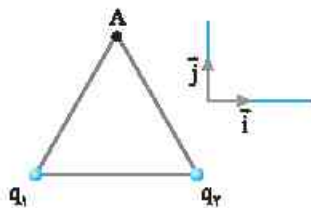
۸۹- روی دایره‌ای به شعاع 1m سه نقطه به فاصله‌های مساوی از یک‌دیگر قرار دارند. دو بار الکتریکی نقطه‌ای $+1\mu\text{C}$ هر کدام روی دو تا از این نقاط قرار دارند. میدان الکتریکی حاصل از آن دو ذره در نقطه‌ی سوم چند نیوتون بر کولن است؟ $(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$



۹۰- در هر یک از رأس‌های مکعبی باری به اندازه‌ی q گذاشته‌ایم، جز یک رأس آن. اندازه‌ی میدان الکتریکی در مرکز این مکعب جقدر است؟ (طول ضلع مکعب را a بگیرد.)



۹۱- در شکل روبه‌رو اگر برآیند میدان الکتریکی بارها در نقطه‌ی O با محور x زاویه‌ی 45° درجه بسازد، q جقدر است؟ در این حالت بزرگی میدان الکتریکی در نقطه‌ی O را به‌دست آورید. $(Q = +4\mu\text{C}, D = 2\text{cm}, d = 3\text{cm})$



۹۲- مطابق شکل دو ذره‌ی باردار q_1 و q_2 در فاصله‌ی 1m از یک‌دیگر قرار دارند. بردار میدان الکتریکی برآیند را در نقطه‌ی A که فاصله‌ی آن از هر یک از بارها برابر 1m است، بر حسب بردارهای یک‌ه‌ی \vec{i} و \vec{j} دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل بنویسید. (نجرینی - خرداد ۹۴)

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

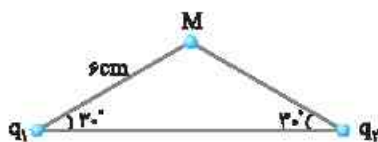
$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}, \quad q_1 = q_2 = 2\text{nC}$$

۹۳- در شکل روبه‌رو اندازه و جهت میدان الکتریکی را در نقطه‌ی M تعیین کنید.

(ریاضی - دی ۹۲)

$$q_1 = q_2 = q = 4\mu\text{C}$$

$$(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2}, \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2})$$

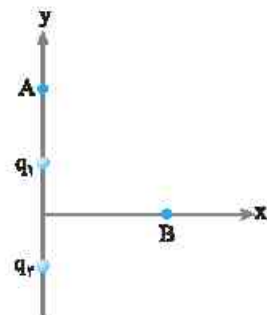
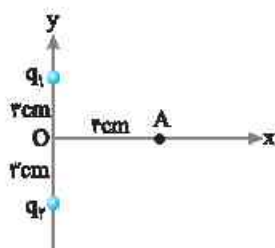


۹۴- دو بار الکتریکی $q_1 = -q_2 = +5\mu\text{C}$ مطابق شکل، به فاصله‌ی 6cm از یک‌دیگر قرار دارند. (ریاضی - شهریور ۹۲)

الف) اندازه‌ی میدان الکتریکی را در نقطه‌ی A واقع بر عمود منصف خط وصل دو بار و در فاصله‌ی 4cm از نقطه‌ی O (وسط خط وصل دو بار) به دست آورید.

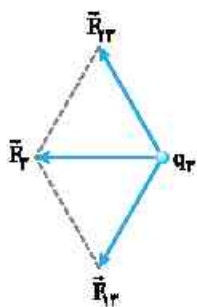
$$(k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2})$$

ب) بردار میدان الکتریکی را بر حسب بردارهای یک‌ه‌ی \vec{i} و \vec{j} بنویسید.



۹۵- در شکل روبه‌رو دو بار هم‌اندازه با بارهای غیر هم‌نام $q_1 = +q$ و $q_2 = -q$ که به فاصله‌ی $2a$ از یک‌دیگر قرار دارند نشان داده شده است. این مجموعه را دو قطبی الکتریکی می‌نامند. میدان الکتریکی دو قطبی الکتریکی را در نقطه‌ی A در فاصله‌ی y از مرکز دو قطبی (نقطه‌ی وسط پاره‌خط وصل دو بار دو قطبی) و روی محور دو قطبی (خطی که از دو بار دو قطبی می‌گذرد) حساب کنید. میدان الکتریکی دو قطبی را در نقطه‌ی B در فاصله‌ی x از مرکز دو قطبی و واقع بر عمود منصف پاره‌خط وصل دو بار دو قطبی به دست آورید.

(ب) بردار نیرو مطابق شکل موازی خط $q_1 q_2$ و به سمت چپ است. ($\vec{F}_r = -5.0\hat{i}$)



ابتدا نیروهای وارد بر q_3 را محاسبه و رسم می‌کنیم. نیرویی که بار q_2 بر بار

q_3 وارد می‌کند روی محور y بوده و تجزیه لازم ندارد. ولی نیرویی که بار q_1 بر بار q_3

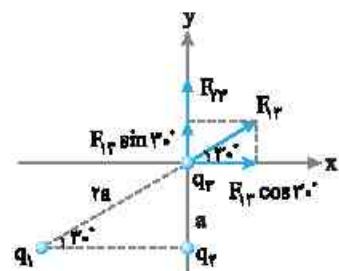
وارد می‌کند را باید در راستای محورهای x و y تجزیه کنیم:

$$F_{r3} = \frac{kq_2q_3}{a^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-5} \times 10^{-5}}{0.5^2} = 3/6 \text{ N}$$

$$F_{13} = \frac{kq_1q_3}{(ra)^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-5} \times 10^{-5}}{1^2} = 0.9 \text{ N}$$

$$\vec{F} = F_{13} \cos 30^\circ \hat{i} + (F_{r3} + F_{13} \sin 30^\circ) \hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 0.9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \hat{i} + (3/6 + 0.9 \times \frac{1}{2}) \hat{j} \Rightarrow \vec{F} = \frac{9\sqrt{3}}{20} \hat{i} + 4/5 \hat{j} \text{ (N)}$$



با توجه به تعریف میدان ($E = \frac{F}{q}$) خواهیم داشت. ب پاسخ ۶۵

$$F = Eq \Rightarrow 5 \times 10^{-2} = E \times 2 \times 10^{-6} \Rightarrow E = 2/5 \times 10^4 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

(الف) با توجه به نمودار در فاصله‌ی ۹cm میدان برابر $20 \times 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ می‌شود. ب پاسخ ۶۶

$$|\vec{E}| = k \frac{q}{r^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{q}{(9 \times 10^{-2})^2} = 20 \times 10^6 \Rightarrow q = 18 \times 10^{-6} = 18 \mu\text{C}$$

(ب) بار برابر $18 \mu\text{C}$ و فاصله $r = 3\text{m}$ است. پس میدان برابر است با:

$$|\vec{E}| = k \frac{q}{r^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{18 \times 10^{-6}}{9} = 18 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

میدان روی محیط دایره‌ی (۱)، با توجه به فاصله q از آن ($r_1 = 3\text{cm}$) برابر است با. ب پاسخ ۶۷

$$|\vec{E}_1| = k \frac{q}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{q}{9 \times 10^{-4}} = q \times 10^{13}$$

میدان روی محیط دایره‌ی (۲) با توجه به فاصله‌ی q از آن ($r_2 = 6\text{cm}$) برابر است با:

$$|\vec{E}_2| = k \frac{q}{r_2^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{q}{36 \times 10^{-4}} = \frac{q}{4} \times 10^{13}$$

اندازه‌ی E_1 ، $3 \times 10^7 \frac{\text{N}}{\text{C}}$ از اندازه‌ی E_2 بزرگتر است پس:

$$\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = q \times 10^{13} - \frac{q}{4} \times 10^{13} = 3 \times 10^7 \Rightarrow \frac{3q}{4} \times 10^{13} = 3 \times 10^7 \Rightarrow q = 4 \times 10^{-6} \text{ C} = 4 \mu\text{C}$$

با توجه به رابطه‌ی $\vec{F} = \vec{E}q$ داریم: ب پاسخ ۶۸

$$\vec{F} = \vec{E}q \Rightarrow \vec{F} = ((1/5\hat{i} - 2\hat{j}) \times 10^7) \times (-2 \times 10^{-6}) = -3\hat{i} + 4\hat{j}$$

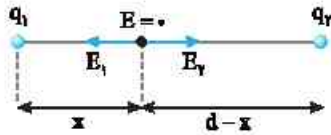
(الف)

$$|\vec{F}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ N}$$



ب) در قانون دوم نیوتون داریم $F=ma$ پس:

$$F=ma \Rightarrow 5 \cdot 10^{-3} \times a \Rightarrow a = 1 \cdot 10^4 \frac{m}{s^2}$$



باید میدان‌های E_1 و E_2 برابر باشد تا میدان برآیند صفر شود، از این رو:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{kq_2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{16}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{16} \Rightarrow x = 16 \text{ cm}$$

میدان در بین دو بار، صفر می‌شود و x فاصله از بار کوچک‌تر و d فاصله‌ی دو بار از هم است، بنابراین داریم:

$$d = 16 + 16 = 32 \text{ cm}$$

اگر میدان الکتریکی بارهای q_1 و q_2 را در نقطه‌ی A به ترتیب \vec{E}_1 و \vec{E}_2 بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E} \\ \vec{E}_2 = 0.5\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \vec{E}_1 = 0.5\vec{E}$$

میدان الکتریکی بارهای q_1 و q_2 در نقطه‌ی A هم‌جهتند ($\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = 0.5\vec{E}$)، بنابراین علامت بارها یکسان نیست، بزرگی میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارها در نقطه‌ی A برابر $0.5E$ است، بنابراین بار q_1 که در فاصله‌ی بیش‌تری از نقطه‌ی A نسبت به بار q_2 قرار دارد، بزرگ‌تر است.

$$\begin{cases} E_1 = \frac{k|q_1|}{d_1^2} = 0.5E \\ E_2 = \frac{k|q_2|}{d_2^2} = 0.5E \end{cases} \Rightarrow \frac{|q_1|}{d_1^2} = \frac{|q_2|}{d_2^2} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \xrightarrow{d_1 > d_2} |q_1| > |q_2|$$

از این‌که با حذف یکی از بارها بدون تغییر جهت میدان اندازه‌ی میدان در نقطه‌ی A کوچک‌تر شده هم می‌توان نتیجه گرفت که بارهای q_1 و q_2 ناهم‌نام هستند.

میدان در نقاط A و B از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} E_A = k \frac{|q|}{(0.3)^2} \\ E_B = k \frac{|q|}{(0.3+d)^2} \end{cases}$$

با توجه به نسبت $\frac{E_A}{E_B}$ مقدار d به دست می‌آید:

$$\frac{E_A}{E_B} = \left(1 + \frac{d}{0.3}\right)^2 = 2/25 \Rightarrow 1 + \frac{d}{0.3} = \sqrt{2/25} = 1/5 \Rightarrow d = 0.15 \text{ m} = 15 \text{ cm}$$



میدان حاصل از q_1 و q_2 در نقطه‌ی O به ترتیب برابر \vec{E}_1 و \vec{E}_2 است

که برآیند آن‌ها \vec{E} است، از طرفی با حذف q_1 ، میدان، ناشی از بار q_2 است، از این رو

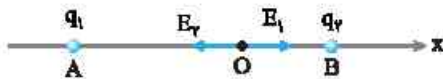
$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ -\vec{E} = \vec{E}_2 \end{cases}$$

می‌توان دو معادله‌ی زیر را نوشت:

در نتیجه، بنابراین داریم: $\vec{E}_2 = -\vec{E}_1$

$$\left| \frac{-E_1}{E_2} \right| = 2 \Rightarrow \frac{q_1 \times 0.3^2}{q_2 \times 1^2} = 2 \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = 2 \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{1}{2}$$

دو بار باید هم‌نام باشند تا میدان‌های آن‌ها در بین دو بار در خلاف جهت هم باشد.



الف) با توجه به رابطه‌ی میدان الکتریکی بار نقطه‌ای، میدان‌های E_1 و E_2 را به دست می‌آوریم:

$$E_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} \Rightarrow E_1 = 9 \times 10^9 \times \frac{4 \times 10^{-6}}{36 \times 10^{-4}} = 10^7 \Rightarrow \vec{E}_1 = 10^7 \vec{i}$$

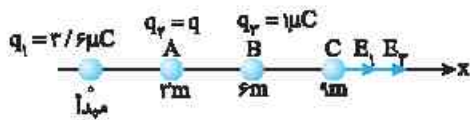
$$E_2 = k \frac{q_2}{r_2^2} \Rightarrow E_2 = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-4}} = 2 \times 10^7 \Rightarrow -2 \times 10^7 \vec{i}$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (-10^7) \vec{i}$$

ب)

$$\vec{F}_O = q \vec{E}_T \Rightarrow \vec{F}_O = -5 \times 10^{-6} \times (-10^7) = 50 \vec{i}$$

بزرگی میدان حاصل از بار q_1 و q_2 را محاسبه می‌کنیم:



$$|\vec{E}_1| = k \frac{q_1}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{3/6 \times 10^{-6}}{81} = 400 \frac{N}{C}$$

$$|E_2| = k \frac{q_2}{r_2^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{1 \times 10^{-6}}{9} = 1000 \frac{N}{C}$$

بزرگی برآیند میدان در نقطه 9m برابر با $10^3 \frac{N}{C}$ است و چون جهت آن

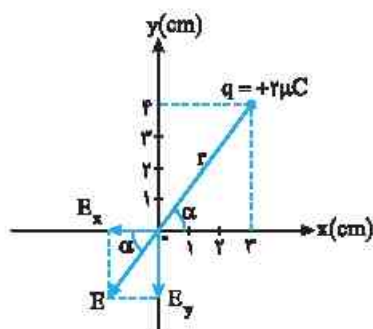
در خلاف جهت محور x است، پس بزرگی آن برابر با $10^3 \frac{N}{C}$ است.

بنابراین:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{E} \Rightarrow 1000 + 400 + E_3 = -1000 \Rightarrow E_3 = -2400 \frac{N}{C}$$

پس بزرگی میدان E_3 برابر $2400 \frac{N}{C}$ و علامت آن منفی است یعنی بردار E_3 در خلاف محور x ها قرار دارد:

$$|\vec{E}_3| = k \frac{q_3}{r_3^2} = 2400 \Rightarrow 9 \times 10^9 \times \frac{q}{36} = 2400 \Rightarrow q \times 10^9 = 9600 \Rightarrow q = 9/6 \times 10^{-6} \text{C} = 9/6 \mu\text{C}$$



ابتدا فاصله‌ی بار q را از مبدأ به دست می‌آوریم:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{cm}$$

اندازه‌ی میدان را در مبدأ حساب می‌کنیم:

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \Rightarrow E = 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-6}}{25 \times 10^{-4}} \Rightarrow E = 7/2 \times 10^6 \frac{N}{C}$$

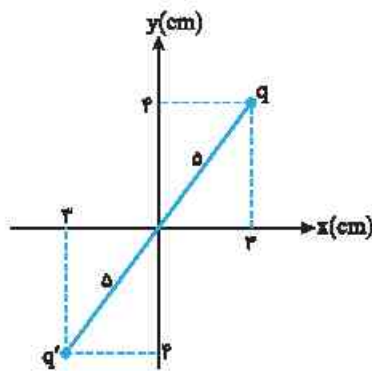
میدان را در دو راستای x و y تجزیه می‌کنیم، با توجه به شکل داریم:

$$\cos \alpha = \frac{E_x}{E} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{E_x}{7/2 \times 10^6} \Rightarrow E_x = 4/22 \times 10^6 \frac{N}{C}$$

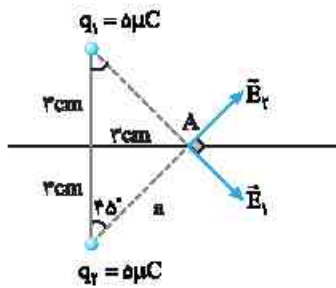
$$\sin \alpha = \frac{E_y}{E} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{E_y}{7/2 \times 10^6} \Rightarrow E_y = 5/76 \times 10^6 \frac{N}{C}$$

در این صورت میدان برحسب \vec{i} و \vec{j} خواهد شد:

$$\vec{E} = -4/22 \times 10^6 \vec{i} - 5/76 \times 10^6 \vec{j}$$



برای صفر شدن میدان در مبدأ باید بار q' هم اندازه‌ی بار q و در فاصله‌ی Δcm در سوی دیگر مبدأ یعنی در ربع سوم باشد.



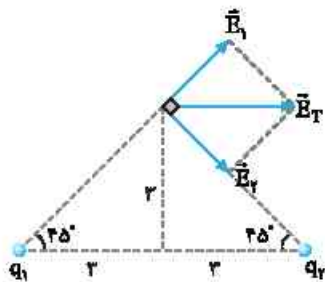
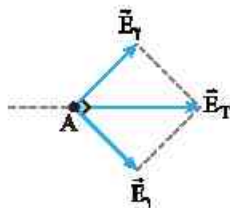
الف) ابتدا فاصله‌ی هر بار تا نقطه‌ی A را به دست می‌آوریم: ب) پاسخ ۷۶

$$a = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$E_1 = E_2 = k \frac{q_1}{a^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{\Delta \times 10^{-6}}{18 \times 10^{-4}} = 2/5 \times 10^7$$

$$E_T = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{(2/5 \times 10^7)^2 + 2} = 2/5 \sqrt{2} \times 10^7 \frac{N}{C}$$

ب) مطابق شکل جهت میدان به سمت راست است.



با توجه به شکل می‌توان نوشت: ب) پاسخ ۷۷

$$E_1 = k \frac{q_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 10 \times 10^{-6}}{18 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^7 \frac{N}{C}$$

$$E_T = 2E_1 \cos \frac{90^\circ}{2} \Rightarrow E_T = 2 \times 5 \times 10^7 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \times 10^7 \frac{N}{C}$$

الف) با توجه به شکل روبه‌رو باید بار q_2 مثبت باشد. ب) پاسخ ۷۸

ب) میدان بار q_1 را حساب می‌کنیم.

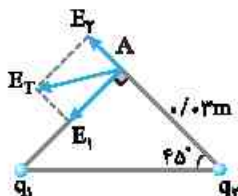
$$E_1 = k \frac{q_1}{r^2} \Rightarrow E_1 = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-4}} = 4 \times 10^7 \frac{N}{C}$$

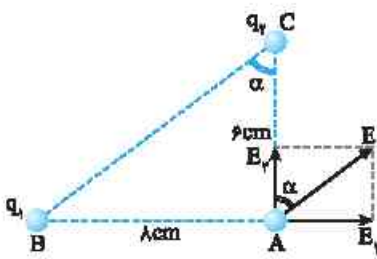
با توجه به شکل و به رابطه‌ی فیثاغورس خواهیم داشت:

$$E_T = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \Rightarrow 5 \times 10^7 = \sqrt{(4 \times 10^7)^2 + E_2^2} \Rightarrow E_2 = 3 \times 10^7 \frac{N}{C}$$

اکنون اندازه‌ی بار q_2 را به دست می‌آوریم:

$$E_2 = k \frac{q_2}{r^2} \Rightarrow 3 \times 10^7 = \frac{9 \times 10^9 \times q_2}{9 \times 10^{-4}} \Rightarrow q_2 = 3 \times 10^{-6} \text{ C}$$





الف) بردار E با BC موازی می‌باشد و با توجه به مورب بودن CA زاویه‌ی $EAC = BCA = \alpha$ می‌باشد. حال بردار E را بر بردارهای قائم‌تجزیه می‌کنیم. E_1 حاصل از بار q_1 و E_2 حاصل از بار q_2 می‌باشد و میدان حاصل از q_1 به سمت خارج بار است. باید q_1 مثبت باشد، همچنین E_2 به سمت بار q_2 است، از این رو باید q_2 منفی باشد.

ب)

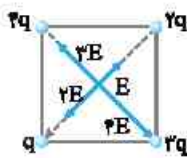
$$\begin{cases} E \sin \alpha = E_1 \Rightarrow \frac{E_1}{E} = \frac{\sin \alpha}{1} = \tan \alpha \\ E \cos \alpha = E_2 \Rightarrow \frac{E_2}{E} = \frac{\cos \alpha}{1} \end{cases}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\lambda}{\rho}$$

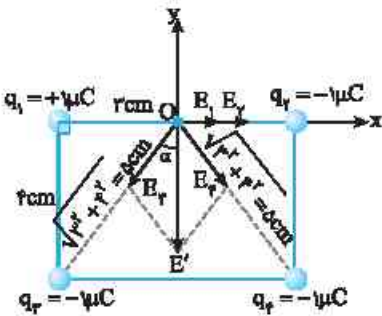
$$E_1 = k \frac{q_1}{r_1^2} = k \frac{|q_1| \times 10^{-4}}{64}$$

$$E_2 = k \frac{q_2}{r_2^2} = k \frac{|q_2| \times 10^{-4}}{36}$$

$$\frac{k |q_1| \times 10^{-4}}{64} = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{36 |q_2|}{64 |q_1|} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = -\frac{9}{16}$$



میدان الکتریکی حاصل از هر یک از بارها در مرکز مربع مطابق شکل مقابل است. می‌توان میدان‌ها را با هم جمع کرد تا میدان کل را به دست آورد. ولی اگر دقت کنید خواهید دید برآیند میدان‌های E_2 و E_3 برابر E_1 به سمت q و برآیند میدان‌های E_4 و E_1 نیز برابر E_2 و به سمت $2q$ است، پس جمع چهار میدان بالا برابر جمع دو میدان E_1 عمود بر هم است که اندازه‌ی آن برابر $\sqrt{2}E$ می‌شود.



ابتدا جهت میدان حاصل از هر بار را مشخص کرده و بزرگی هر کدام را محاسبه می‌کنیم:

اندازه بارهای q_1 و q_2 با هم برابر و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه‌ی O یکسان است بنابراین میدان‌های حاصل از آن‌ها با هم برابر و هر دو افقی و در راستای i می‌باشد.

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = k \frac{q}{r^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{1 \times 10^{-6}}{9 \times 10^{-4}} = 10^7 \frac{N}{C}$$

$$\vec{E}_1 = (E_1 + E_2)_i = 2 \times 10^7 \vec{i}$$

همچنین اندازه‌ی بارهای q_3 و q_4 با هم برابر و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه‌ی O یکسان است، پس:

$$|\vec{E}_3| = |\vec{E}_4| = k \frac{q}{r^2} = 9 \times 10^9 \times \frac{1 \times 10^{-6}}{25 \times 10^{-4}} = 3/6 \times 10^6 \frac{N}{C}$$

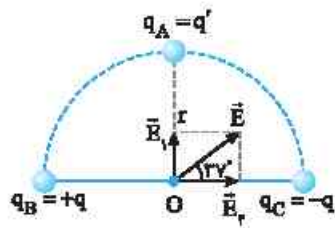
میدان‌های \vec{E}_3 و \vec{E}_4 با هم هم‌اندازه می‌باشند و به دلیل تقارن، بردار برآیند آن \vec{E}' قائم بوده در راستای $-j$ می‌باشد. (مؤلفه‌های افقی \vec{E}_3 و \vec{E}_4 یکدیگر را خنثی می‌کنند.) پس برآیند مؤلفه‌های عمودی را حساب می‌کنیم:

$$\cos \alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5}$$

$$E_{ry} = E_{fy} = E_r \cos \alpha = 3/6 \times 10^6 \times \frac{4}{5} = 2/88 \times 10^6 \frac{N}{C}$$

$$E' = E_{Ty} \Rightarrow E_{Ty} = E_{ry} + E_{fy} = 2 \times 2/88 \times 10^6 = 5/76 \times 10^6 \frac{N}{C}$$

$$\vec{E} = 2 \times 10^7 \vec{i} - 5/76 \times 10^6 \vec{j}$$



با تجزیه بردار E روی محورهای قائم و افقی به مؤلفه‌های E_x و E_y داریم:

$$\begin{aligned} E \cos 37^\circ &= \vec{E}_r \Rightarrow \frac{\vec{E}_t}{\vec{E}_r} = \tan 37^\circ \quad (1) \\ E \sin 37^\circ &= \vec{E}_t \end{aligned}$$

که \vec{E}_t میدان بار q_A و \vec{E}_r میدان برآیند میدان بارهای q_B و q_C در نقطه‌ی O می‌باشد.

$$E_t = E_A = k \frac{q_A}{r^2} = k \frac{q'}{r^2}$$

$$E_r = E_C + E_B = k \frac{q_C}{r^2} + k \frac{q_B}{r^2} = k \frac{2q}{r^2}$$

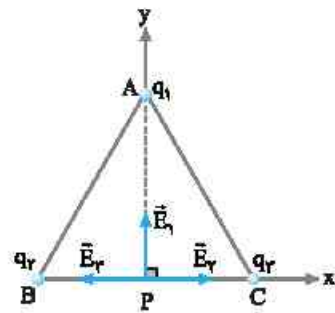
$$\frac{|\vec{E}_t|}{|\vec{E}_r|} = \frac{k|q'|}{k \frac{2q}{r^2}} = \tan 37^\circ = \frac{r}{4} \Rightarrow \frac{|q'|}{2q} = \frac{r}{4} \Rightarrow \frac{|q'|}{|q|} = \frac{r}{2}$$

حال با توجه به معادله‌ی (۱) داریم:

$$\frac{q_A}{q_B} = \frac{q_A}{q_B} = -\frac{r}{2}$$

بار q' با توجه به جهت میدان آن باید منفی باشد از این رو:

در مثلث ABC هم نیمساز و هم ارتفاع است.



$$\cos \text{PAC} = \frac{AP}{AC} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{AP}{a} \Rightarrow AP = a \cos 30^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AP = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$$

$$E_1 = \frac{kq_1}{r^2} = \frac{kq_1}{AP^2} = 4 \times 10^9 \times \frac{3 \times 10^{-6}}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \Rightarrow E_1 = 36 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_x = \vec{E}_{1x} + \vec{E}_{2x} + \vec{E}_{3x} \\ \vec{E}_y = \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y} + \vec{E}_{3y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x = 0 + E_2 - E_3 = E_2 - E_3 \\ E_y = E_1 + 0 + 0 = E_1 \end{cases}$$

از آن‌جا که نقطه‌ی P وسط ضلع BC و $q_2 = q_3$ است، $E_2 = E_3$ و در نتیجه $E_x = 0$ است و داریم:

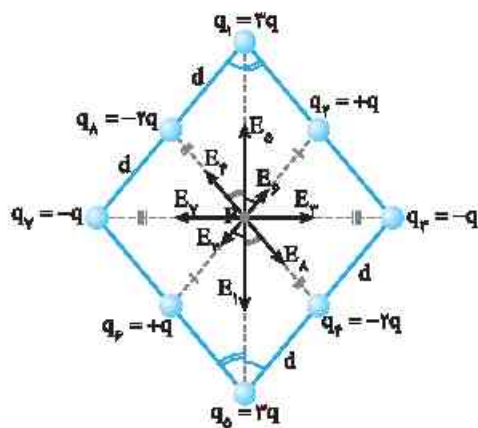
$$E_x = 0, E_y = E_1, \vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} \Rightarrow \vec{E} = E_1 \vec{j} \Rightarrow \vec{E} = 36000 \vec{j} \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

نیروی وارد بر یک بار در یک میدان الکتریکی از رابطه‌ی $\vec{F} = q\vec{E}$ به دست می‌آید که اگر بار q منفی باشد، جهت نیرو در خلاف

$$\vec{F} = -4 \times 10^{-6} \times (36000 \vec{j}) = -0.144 \vec{j}$$

جهت میدان الکتریکی است. بنابراین:

یعنی نیرو در جهت منفی محور y و بزرگی آن $0.144 \times 10^{-3} \text{ N}$ است.



میدان حاصل از هر بار نقطه‌ای را در مرکز P می‌کشیم.

اندازه‌های q_2 و q_4 و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه‌ی P با هم برابر می‌باشد.

$$E_2 = E_4 = k \frac{q}{r^2}$$

پس:

و چون E_2 و E_4 خلاف جهت و هم‌اندازه با هم می‌باشند:

$$\vec{E}_2 + \vec{E}_4 = E_2 - E_4 \xrightarrow{E_2 = E_4} \vec{E}_2 + \vec{E}_4 = 0$$

اندازه‌های q_1 و q_3 و فاصله‌ی هر کدام تا نقطه‌ی P با هم برابر می‌باشد

$$E_1 = E_3 = k \frac{2q}{r^2}$$

پس:

و چون E_1 و E_3 خلاف جهت و هم‌اندازه با هم می‌باشند:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_3 = E_1 - E_3 = 0$$